

NAIST-IS-MT9451049

修士論文

Regge Calculus による重力場方程式の数値計算と  
重力場光線追跡法

佐藤 哲

1996年2月16日

奈良先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に  
修士(工学)授与の要件として提出した修士論文である。

佐藤 哲

指導教官： 横矢 直和 教授  
千原 國宏 教授  
竹村 治雄 助教授

# Regge Calculus による重力場方程式の数値計算と 重力場光線追跡法<sup>†</sup>

佐藤 哲

## 内容梗概

計算機は元々人間より速く数学的な計算を行なうために開発された。そのため、早くから計算物理学と呼ばれる分野が確立された。また、近年急速に発展しているコンピュータグラフィックスは人間に新しい表現手法を与えた。本研究では重力場を対象に、その二つの分野を融合させた科学的可視化について、いくつかの新しい手法を提案する。具体的には、Regge Calculus と呼ばれる手法により重力場方程式を解き、その結果を重力場光線追跡法という手法により可視化を行なう。Regge Calculus については一般的な 4 次元空間を単体分割する手法を開発した。重力場光線追跡法については時間発展パラメータによる微分方程式を導いて相対論的に運動している物体を可視化する手法を開発した。最終的に、可視化プログラムの並列化を行ない、仮想的なブラックホールの周辺を運動する物体のアニメーションを制作することに成功した。

## キーワード

相対性理論, 重力場, 数値解析, レッジ計算法, 科学的可視化, 光線追跡法

---

<sup>†</sup>奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 修士論文, NAIST-IS-MT9451049, 1996年2月16日.

# Gravitational Ray Tracing Method and Numerical Analysis of a Gravitational Field Using Regge Calculus<sup>†</sup>

Tetsu Satoh

## Abstract

Originally, computers were developed to calculate mathematical formula faster than human beings. Therefore, a field called computational physics was established in early days of computer science. On the other hand, computer graphics have recently evolved drastically have given us new expression techniques. This paper describes some new methods in the scientific visualization that was established by merging such two research fields. I first solve a gravitational equation using the Regge Calculus and then visualize its solution using a newly developed gravitational ray tracing method. Using Regge Calculus, I developed a method that divides general four-dimensional space-time into simplexes. About gravitational ray tracing method, I derived differential equations including a time-evolution parameter and developed a method that can visualize relativistic moving objects. Finally, I have successfully generated animations of a dynamic scene in which an object is moving in the vicinity of a black hole.

## Keywords:

Theory of Relativity, Gravitational Fields, Numerical Analysis, Regge Calculus, Scientific Visualization, Ray Tracing Method

---

<sup>†</sup>Master's Thesis, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-MT9451049, February 16, 1996.

# 目次

1. はじめに	1
2. 科学的可視化の対象としての重力場	3
3. Regge Calculus による重力場方程式の数値計算	5
3.1 Regge Calculus	5
3.1.1 単体分割と欠損角	6
3.1.2 Regge 方程式	8
3.1.3 Regge 方程式の計算法	11
3.2 4次元単体計算	12
3.2.1 4次元単体分割	12
3.2.2 「ちょうつがい」リストアップと同一視問題	13
3.2.3 辺の長さの計算	16
3.3 シミュレーション	16
3.3.1 アルゴリズム	16
3.3.2 結果例	18
3.4 考察	19
4. 重力場光線追跡法	20
4.1 運動方程式の導出	21
4.1.1 計量テンソルの計算	21
4.1.2 運動方程式の導出	24
4.2 刻幅適応変化アルゴリズム	29
4.3 座標変換	30
4.3.1 世界座標系と運動平面座標系	30
4.3.2 世界座標系と視野座標系	31
4.4 視線追跡法	32
4.5 実験	32
4.5.1 平面上での実験	33

4.5.2	空間内での実験 . . . . .	34
4.6	考察 . . . . .	35
5.	おわりに . . . . .	40
	謝辞 . . . . .	41
	付録 . . . . .	42
A.	数学的準備：リーマン幾何学と一般相対性理論 . . . . .	42
A.1	ベクトル空間 . . . . .	42
A.1.1	ベクトルの成分 . . . . .	43
A.1.2	反変ベクトルと共変ベクトル . . . . .	45
A.1.3	共変微分 . . . . .	46
A.2	リーマン多様体 . . . . .	48
A.2.1	多様体 . . . . .	48
A.2.2	ベクトルの内積 . . . . .	49
A.2.3	測地線の微分方程式 . . . . .	49
A.2.4	曲率 . . . . .	52
A.3	一般相対性理論 . . . . .	52
	参考文献 . . . . .	54

## 1. はじめに

近年コンピュータグラフィックスの技術が発展し、実際に人間が目で見えて認識する映像に非常に近い画像データを作成することが可能となってきた。また、計算速度と精度の向上により、解は存在するが解析的には求められない微分方程式を数値的に解く計算機物理学と呼ばれる分野が確立されている。この二つの分野を融合した科学的可視化と呼ばれる分野には、次のような大きな意義がある。

1. 実際には目に見えない物理現象を視覚的に認識させることにより、直観的な理解度を向上させる。
2. 時間的、金銭的、物理的などの理由により実際には実験又は観測不可能な現象をシミュレートする。

1の例として代表的なものに、温度場、電磁場や流体の可視化がある。これらの研究は、差分法や有限要素法の研究と共に1960年代の計算機開発当初から行なわれてきた。このうち流体の方は計算流体力学という分野がすでに確立され、文献 [1] に解説が載っている。温度のようなスカラー場の場合は、その点の場の強さを色分けなどで表示すれば良い [4]。ベクトル場は、初期の頃はある点のベクトルを矢印で表示するというものが多かったが、近年ではいかに分かりやすく視覚化するかということが課題になっている。例えば全体的な様子を見るものとして、流体場に色の付いた粒子を流してその振舞いを調べる方法 [2][3]、様々な装飾のついた矢印で局所的な情報を見せる方法 [5] などがある。文献 [5] では、テンソル場の可視化にも成功している。2の例としては、天体の運行や星の爆発などの計算があげられる。これについては、[6] を始めとして、近年のスーパーコンピュータの発展と共に活発に研究され始めている。

科学的可視化の対象として、本研究では重力場を取り上げる。重力場を表す方程式は複雑で計算が難しく、かつテンソル場なために可視化も難しい。従って過去の研究は非常に少ない。本論文では、このテンソル場を可視化するために、場に特殊な粒子として、光を表す質量がゼロの”光子”を流すことにした。光子の流れはすなわち視点から発した視線の流れと取ることが可能で、視線の行き先を調べることで重力場によってどのような情景が見ることが可能かを調べることができ

る。光子の流れは、通常のニュートン力学では直線とされている。しかし強い重力場ではニュートン力学は成り立たず、一般相対論的力学を使用しなければならない。本論では光子の流れを調べるために、まず通常の直線の方程式の代わりに一般相対性理論の重力場方程式より測地線の微分方程式を導く。そしてその微分方程式を初期地点を視点として、差分スキームによって微分方程式を解いて視点から順次座標を進めていく。光子と同様に、重力場内に配置する物体についても微分方程式を導き、あらかじめ軌道を計算しておく。そして光子の行き着く先を調べ、それによって視点から見るができると思われる情景を可視化する。この一連の方法を重力場光線追跡法と呼ぶことにする。しかし、重力場方程式はそう簡単に解くことができない。重力場方程式を解くのが難しい理由は、流体や電磁場のようなベクトル方程式ではなくテンソル方程式で、なおかつ非線形偏微分方程式だからである。

本論文では **Regge Calculus** と呼ばれる方法で重力場方程式の解を求めることを試みる。**Regge Calculus** は微分の差分化を行わずに重力場方程式を多数の連立方程式群に変換するもので、変化の激しい強い重力場での数値計算に威力を発揮するのではないかと期待されている。しかし今のところ、**Regge Calculus** を重力場の量子化法として研究は多いが数値計算へ応用した研究は少ない。ADM 方式と呼ばれる別の数値的相対論のためのアプローチが普及しているからである。ADM 方式は通常連続空間上の重力場方程式の変形法だが、**Regge Calculus** は空間を離散化してからその上で重力場方程式を構成する方法であるという違いがあり、その空間の離散化法が難しい点に問題がある。そこで本論文では形式的に一般的な空間を離散化する手法を提案し、実際にその方法を用いて導かれた離散空間上の重力場方程式をモンテカルロ法によって解く。このように、**Regge Calculus** によって重力場方程式を解き、その解を重力場光線追跡法によって可視化することにより、重力場の可視化を可能とする。

実際のプログラミングの際は、光子一つの軌道計算に対し CPU 一つを割り当てるという並列化によって激的な高速化を図ることができ、多数の画像データよりアニメーションを作成することができた。物体が原点を中心に楕円軌道を描く様子の一部を抜粋して紹介する。



## 2. 科学的可視化の対象としての重力場

本研究は, 重力場方程式を解いて各座標での重力場の値を調べ, それを元に重力場を通る光の曲がり具合を考慮して重力場周辺的情景を可視化する. これを重力場光線追跡法と呼ぶことにする. 重力場光線追跡法を実現するには, 視点から光を発し, 重力による空間の歪みを考慮して光の軌道を追跡し, 光がどこにぶつかるか調べれば良い. その際, ニュートン力学とは違い光は直進しないので, 重力場方程式を用いて軌道の微分方程式を導かなければならない. 一般相対性理論により導かれる重力場の偏微分方程式は, 2 階のテンソルによって記述される非線形偏微分方程式ため数値的に解くのさえ難しい. 従って通常は厳しい仮定条件を付けて簡単化する. ところがこの方法では一般的な解を求めることができない. そこで重力場方程式を数値的に解く手法として **Regge Calculus**[9] と呼ばれる手法が提案されている. **Regge Calculus** は差分近似を用いずに偏微分方程式を連立方程式に変換するというもので, 従来の差分近似より精度良く計算できるものと期待できる. 本稿ではこの **Regge Calculus** のモンテカルロ法による解き方について検討したので [10], それについて 3 章で述べる. 過去の **Regge Calculus** の研究は,  $n$  次元球面を単体近似したり空間を正多面体で近似するもので, 一般性に欠けた. 本論では 4 次元空間を 4 次元超立方体で近似してから各超立方体を単体に分割するという方法で, 方向に依存せずに非常に一般的な **Regge Calculus** を実現した. 空間を格子分割する際に発生する符号化問題, さらに符号の同一視問題についても言及してある.

なんらかの方法で重力場方程式の解を得たのなら, 次はその解を可視化しなければならない. 重力場は目に見えないばかりでなくテンソルで表されるので, ベクトル場のように矢印で可視化することはできない. そこで物体を重力場に配置し, それがどのように見えるかをレイ・トレーシング法によりシミュレーションを行ない可視化する方法が研究されてきたが [11][12], 光の軌道のみを計算し, 物体の運動は考慮されていないものがほとんどであった. これまでのこの方向の研究をさらに拡張し, 重力源の周りを物体が相対論的に運動し, その様子を重力場光線追跡法により可視化するように拡張した [13]. 相対論的運動とは, 重力源の周りを回る時に重力場により一周の角度が  $2\pi$  より小さくなるため一周しても同じ場

所には戻らず、「バラの花型」と呼ばれる軌道を描くような運動のことである。さらに計算速度向上のために、計算の細かさを適応的に変化させる方法、回転行列を用いずに座標変換をする方法、プログラムの並列化などの工夫を行なったので、それを4章において述べる。

重力場の偏微分方程式は、アインシュタインの一般相対性理論 [7] によって導かれる。一般相対性理論は通常のユークリッド幾何学とは異なるリーマン幾何学 [8] によって記述される。ユークリッド幾何学では微小距離  $\Delta s$  の2乗はピタゴラスの定理により

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

のように表されるが、リーマン幾何学ではこれを拡張して

$$\Delta s^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j$$

のように表す。ここで  $x^i$  は  $x^0 = x, x^1 = y, x^2 = z$  などを表し、 $g_{ij}$  は計量テンソルと呼ばれて空間の歪み具合を表し、重力場方程式では変数として扱われる。3次元ベクトル場ならば成分が

$$v = (v_0, v_1, v_2)$$

のように表されるのに対し、相対性理論における計量テンソルは

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

と表される。このように成分が多いことが可視化が難しいといわれる理由である。付録において最小限のリーマン幾何学について述べる。

### 3. Regge Calculus による重力場方程式の数値計算

一般相対性理論の重力場方程式は 2 階非線形偏微分方程式で一般的な解析解を求めることは不可能である. そこでこの重力場方程式に対する新しいアプローチ法として, 差分近似を行わずに偏微分方程式を連立方程式に変換する Regge Calculus[14] が Regge(1961) によって提案された.

Regge Calculus は全空間を単体分割し, 格子状になった空間で重力場方程式を構成する. この方向の研究として, まず Wong が球対称の 3 次元空間を 20 面体で近似する 20 面体法と小さな 6 面体で近似する連続体法を提案し, 真空と電磁場において数値計算を行なった [15]. 時間発展問題と初期値問題については Sorkin が議論を始めた [16]. 時間のみ連続値を取るとし, 他の変数については格子分割を行なう 3 + 1 分解と, その方程式の球対称宇宙モデルにおける解が Lewis[17] や Collins, Williams[20] らによって調べられた. 同様に時間方向のみ連続的にとらえたより一般的な 3 + 1 分解についても Piran や Williams によって導かれている [21]. Hamber や Williams によって高次の項を加えた作用からの Regge 方程式が導かれているが [18][19], 連続時空との一致性については完全には分かっていない [22][23]. このように Regge Calculus は重力理論の新しい量子化法として期待され盛んに研究が行なわれているが, 一方で古典的一般相対性理論に Regge Calculus を適用して重力場方程式の数値計算に利用しようという研究もある. Porter は時間軸方向にも離散的な分割を行ない, 格子上の重力場方程式を導いた [24][25].

本章では時間軸を特別扱いせずに, 完全な 4 次元空間単体分割を実現する手法について検討し, 実験結果を報告する.

#### 3.1 Regge Calculus

Regge Calculus は, 空間を単体と呼ばれる単位に分割し, 単体間の欠損角というものを計算する. 本節ではその単体と欠損角について説明し, 4 次元空間を単体分割した Regge 多様体上で重力場方程式を導く. 導かれた方程式は, 3 角形の辺の長さによって計算できるので, その具体的な手法を最後に示す.

### 3.1.1 単体分割と欠損角

単体分割は 3 角形分割とも呼ばれ, 単体とは 2 次元では 3 角形, 3 次元では 4 面体になる. 数学的には, 次のように定義される.

定義 3.1

$x_0, x_1, \dots, x_m \in R^n$  の  $m + 1$  個の点について,  $m$  個のベクトル

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_{m-1} - x_{m-2}$$

が線形独立な時に凸独立であるという.

定義 3.2

$m$ -単体  $\sigma^m$  を次の点の集合で定義する.

$$\sigma^m = \left\{ x = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

各  $m$ -単体は, 「ちょうつがい」の周りに集まっており,  $m$ -単体を  $m$  次元平面上に広げた時に空く角度を欠損角  $\delta$  という.

定義 3.3

欠損角  $\delta$  を次式で定義する.

$$\delta = 2\pi - \sum_i \theta_i$$

ただし  $\theta_i$  は, 「ちょうつがい」の周りに集まっている  $(m-1)$ -単体同士の間角度である.

2 次元多様体を 2-単体である 3 角形で近似した例を示す (図 1). 2 次元の場合は単体が頂点に集中しているので, 例えば球面を単体分割した場合, 全ての単体の欠損角の総和が球面の曲率の面積分の  $1/2$  となる:

$$\begin{aligned} \sum \delta_i &= \frac{1}{2} \int R ds \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{r^2} \int ds \end{aligned}$$

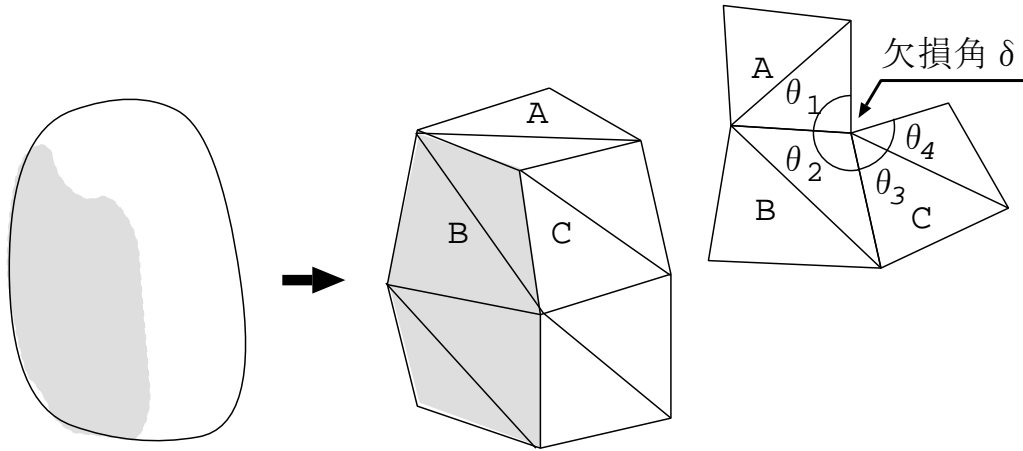


図 1 欠損角

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{r^2} \times 4\pi r^2 \\
 &= 4\pi.
 \end{aligned}$$

これを一般の 2 次元多様体に拡張すると、次の対応が成り立つ。

$$\sum \delta_i \rightarrow \frac{1}{2} \int R \sqrt{g} d^2x$$

ここで  $R$  は多様体の曲率,  $g$  は計量テンソルの行列式の値である.  $d^2x$  は微小面積要素を表す.  $\sqrt{g}$  は通常の面積分のヤコビアンに相当し, 座標系による微小面積の大きさの違いの調整のために必要な係数である. さらに 2 次元から 3 次元, 4 次元に拡張すると, 表 1 のようになる.

表 1 からの類推で, 4 次元での格子空間と連続時空との関係は

$$\sum A_i \delta_i \rightarrow \frac{1}{2} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (3.1)$$

となることが分かる. 左辺は三角形の面積  $A_i$  と, その面積に付随する欠損角  $\delta_i$  の積となっている. ところで 3 角形の面積は, 3 辺の長さが分かれば一意に決めることができる. 欠損角はある面により結合された 2 つの 3-単体間の角度から計算できるが, 単体間の角度も単体の辺の長さが全て分かれば計算できることを後で示

多様体の次元	2	3	4
「ちょうつがい」の次元	0	1	2
「ちょうつがい」の大きさ	点	長さ $l$	面積 $A$
欠損角の大きさの総和	$\sum \delta_i$	$\sum l_i \delta_i$	$\sum A_i \delta_i$

表 1 2, 3, 4 次元の欠損角の総和

す. 従って式 (3.1) は三角形の辺の長ささえ決定すれば計算できることになり, 4 次元の連続時空を 2 次元で表したことになる. これは曲面のガウス・ボンネの定理の拡張とみなすことができる.

### 3.1.2 Regge 方程式

真空でのアインシュタインの重力場方程式は, 作用

$$I = \int R \sqrt{-g} d^4 x$$

において, 変分原理

$$\delta I = 0$$

を適用すれば導くことができる. 式 (3.1) より, 格子重力場理論では

$$\delta \sum A_i \delta_i = 0 \tag{3.2}$$

を計算すれば良いことになる. 式 (3.2) は  $\sum \delta A_i \delta_i + \sum A_i \delta \delta_i = 0$  となるが,  $\sum A_i \delta \delta_i = 0$  が常に成り立つことは文献 [16] により証明が与えられているので,

$$\sum \delta A_i \delta_i = 0 \tag{3.3}$$

を計算する.

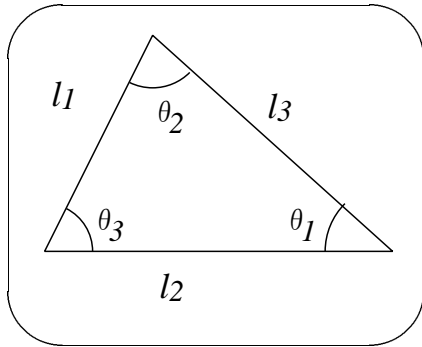


図 2 三角形

図 2 のような場合を考える. この三角形の面積は

$$A = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \theta_3 \quad (3.4)$$

と書ける. 余弦定理より,

$$\cos \theta_3 = \frac{l_3^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}. \quad (3.5)$$

式 (3.5) =  $f(l_1, l_2, l_3)$  とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l_1} &= \frac{-l_3^2 - l_1^2 + l_2^2}{2l_1^2 l_2} \\ &= \frac{l_3}{l_1 l_2} \frac{-l_3^2 - l_1^2 + l_2^2}{2l_1 l_3} \\ &= \frac{l_3}{l_1 l_2} \cos \theta_2 \quad (\text{余弦定理}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l_2} &= \frac{-l_3^2 - l_2^2 + l_1^2}{2l_1 l_2^2} \\ &= \frac{l_3}{l_1 l_2} \frac{-l_3^2 - l_2^2 + l_1^2}{2l_2 l_3} \\ &= \frac{l_3}{l_1 l_2} \cos \theta_3 \quad (\text{余弦定理}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_3} = \frac{l_3}{l_1 l_2} \quad (3.8)$$

よって,

$$\delta f = \frac{l_3}{l_1 l_2} \cos \theta_2 \delta l_1 + \frac{l_3}{l_1 l_2} \cos \theta_3 \delta l_2 + \frac{l_3}{l_1 l_2} \delta l_3 \quad (3.9)$$

となる. ところで,  $f = \cos \theta_3$  だったから,

$$\delta f = -\sin \theta_3 \delta \theta_3 \quad (3.10)$$

とも書ける. 式 (3.10) より,

$$\delta \theta_3 = -\frac{\delta f}{\sin \theta_3} \quad (3.11)$$

なる関係式が導ける. すると, 式 (3.4) の変分を取ることにより

$$\begin{aligned}\delta A &= \frac{1}{2} (l_2 \sin \theta_3 \delta l_1 + l_1 \sin \theta_3 \delta l_2 + l_1 l_2 \cos \theta_3 \delta \theta_3) \\ &= \frac{1}{2} \left( l_2 \sin \theta_3 \delta l_1 + l_1 \sin \theta_3 \delta l_2 - l_1 l_2 \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} \delta f \right)\end{aligned}\quad (3.12)$$

を得る. ここで,  $\delta f$  に式 (3.9) を代入し,  $\delta l_1$  について整理すると

$$\begin{aligned}l_2 \sin \theta_3 - \frac{l_3 \cos \theta_3 \cos \theta_2}{\sin \theta_3} &= l_2 \sin \theta_3 - \frac{l_2 \cos \theta_3 \cos \theta_2}{\sin \theta_2} \quad (\text{正弦定理}) \\ &= \frac{-l_2 (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3)}{\sin \theta_2} \\ &= \frac{-l_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)}{\sin \theta_2} \\ &= \frac{-l_2 \cos(2\pi - \theta_1)}{\sin \theta_2} \\ &= \frac{-l_2 \cos \theta_1}{\sin \theta_2} \\ &= \frac{-l_1 \cos \theta_1}{\sin \theta_1} \quad (\text{正弦定理})\end{aligned}\quad (3.13)$$

と簡単な式になる. 同様に,  $\delta l_2, \delta l_3$  についても整理すると, 式 (3.12) は次のようになる.

$$\delta A = \frac{1}{2} \left( \frac{-l_1 \cos \theta_1}{\sin \theta_1} + \frac{-l_2 \cos \theta_2}{\sin \theta_2} + \frac{-l_3 \cos \theta_3}{\sin \theta_3} \right)\quad (3.14)$$

式 (3.14) より, 次の対応が成り立つ.

$$\delta A = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 l_i \cot \theta_i \delta l_i = 0\quad (3.15)$$

すると, 2次元 Regge 多様体上の  $j$  番目の面については

$$\delta A_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in \text{edge } A_j} l_i \cot \theta_i \delta l_i = 0\quad (3.16)$$

であるので,

$$\sum \delta_i \delta A_i = \sum_{\text{all } j} \sum_{i \in \text{edge } A_j} \delta_j l_i \cot \theta_i \delta l_i\quad (3.17)$$



となる. 最後に式 (3.17)=0 とおくと,  $\delta l_i$  は任意だから

$$\sum_{all\ j} \delta_j l_i \cot \theta_i = 0 \quad (i \in all\ edge) \quad (3.18)$$

なる方程式を得る. これを Regge 方程式と呼ぶことにする.

定理 3.1

2次元リーマン多様体を単体分割した2次元 Regge 多様体上で, 重力場方程式は次の形を取る.

$$\sum_{all\ j} \delta_j l_i \cot \theta_i = 0$$

ここで,  $j$  は全ての単体に割り振られた番号,  $i$  は全ての辺に割り振られた番号,  $\delta_j$  は  $j$  番目の欠損角,  $l_i$  は  $i$  番目の辺の長さを表す.

### 3.1.3 Regge 方程式の計算法

Regge 方程式では, 欠損角  $\delta_j$  及び 3 角形内部の角度  $\cot \theta_i$  の 2 種類の角度を求めなければならない.

まず, 欠損角は

$$\delta_{pqr} = 2\pi - \sum \theta_{pqrs, pqrt}$$

であり,  $\theta_{pqrs, pqrt}$  は 4 次元単体間の角度 (図 3) であるから, 4 次元の余弦定理により次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \theta_{pqrs, pqrt} &= \arccos \frac{\Delta(pqrs, pqrt)}{\sqrt{\Delta(pqrs, pqrs)\Delta(pqrt, pqrt)}} \\ \Delta(pqrs, pqrt) &= D(pqr, pqr)D(pqs, pqt) - D(pqr, pqt)D(pqr, pqs) \\ D(pqr, pqs) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{qp}^2 & l_{rq}^2 \\ 1 & l_{pq}^2 & 0 & l_{rq}^2 \\ 1 & l_{ps}^2 & l_{qs}^2 & l_{rs}^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3 角形内部の角度 (図 4) は, 2 次元の余弦定理により次のように与えられる.

$$\cot \theta_{pqr} = \frac{l_{pq}^2 + l_{qr}^2 - l_{pr}^2}{\sqrt{2l_{pq}^2 l_{pr}^2 + 2l_{pq}^2 l_{qr}^2 + 2l_{pr}^2 l_{qr}^2 - l_{pr}^4 - l_{qr}^4 - l_{pq}^4}}$$

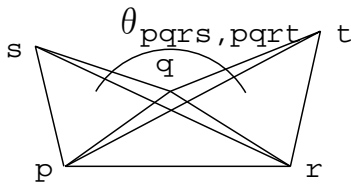


図3 4次元単体間の角度

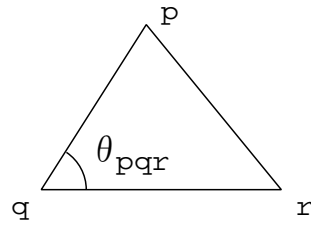


図4 3角形内部の角度

このように,Regge 方程式は全て2次元単体である3角形の辺の長さだけから計算できることが分かる.

### 3.2 4次元単体計算

2次元や3次元の空間と違って4次元空間は図示することができず,形式的な類推計算によって単体分割を行なわなくてはならない.本節ではその方法と,それによって発生する問題とその解決法について述べる.

#### 3.2.1 4次元単体分割

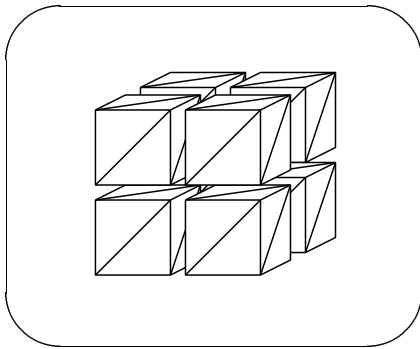


図5 3次元空間の立方体単体分割

本研究では,4次元空間を4次元超立方体で格子分割し,その超立方体一つ一つをさらに単体に分割するという手法を取る.図5に3次元空間でのイメージを示す.その方法として,超立方体の一つの頂点を原点とし,そこからの距離によって各頂点にハミング符号を割り当て,単体を符号化する方法を提案する.

まず,3次元の場合にこの手法を適用し,4次元に拡張する.立方体の1辺の長さを $l$ とし, $(xyz)$ の3ビットのハミング符号を頂点に割り振り符号化を行なうと,次のように6つの単体に分割できる.

原点	$l$	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{3}l$	符号
000	001	011	111	→ 0137
000	001	101	111	→ 0157
000	010	011	111	→ 0237
000	010	110	111	→ 0267
000	100	101	111	→ 0457
000	100	110	111	→ 0467

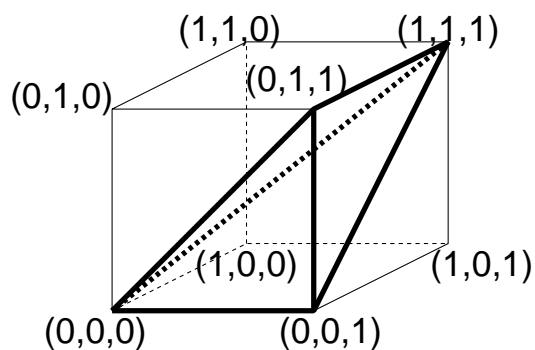


図 6 単体の例 [0137]

4次元では, 表2のようになる.

### 3.2.2 「ちょうつがい」リストアップと同一視問題

3次元単体の「ちょうつがい」は1次元の辺である. 単体は任意の2頂点が接続されているので, 図6の例単体0137では「ちょうつがい」リストは

$$01, 03, 07, 13, 17, 37$$

となる. 同様に4次元単体の「ちょうつがい」は2次元の面であるから, 例えば単体0137Fの「ちょうつがい」リストは0137Fから任意の3点を取った

$$013, 017, 01F, 037, 03F, 07F, 137, 13F, 17F, 37F$$

である. ただし, 空間は超立方体で埋め尽くされているので, 接触しているために同一視しなければならない場合があることに注意しなければならない. 3次元の例を図7に示す. 左側の立方体の座標を $(0, 0, 0)$ , 右側の立方体の座標を $(0, 0, 0)^+$ のように表すとする. 図では離して描いているが, 実際には二つは接触している. そのため,  $(0, 0, 1)$ と $(0, 0, 0)^+$ は同じ点を表す. 同様に,  $(0, 1, 1) \equiv (0, 1, 0)^+$ である. 従って,

$$\text{ちょうつがい } 13 \equiv \text{ちょうつがい } 02^+$$

が成り立つ. これは,  $\alpha = 1, \beta = 3$ とにおいて

$$\text{ちょうつがい } \alpha\beta \equiv (\text{ちょうつがい } \alpha\beta \text{ xor } 11)^+$$

原点	$l$	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{3}l$	$2l$		符号
0000	0001	0011	0111	1111	→	0137F
0000	0001	0011	1011	1111	→	013BF
0000	0001	0101	0111	1111	→	0157F
0000	0001	0101	1101	1111	→	015DF
0000	0001	1001	1001	1111	→	019BF
0000	0001	1001	1101	1111	→	019DF
0000	0010	0011	0111	1111	→	0237F
0000	0010	0011	1011	1111	→	023BF
0000	0010	0110	0111	1111	→	0267F
0000	0010	0110	1110	1111	→	026EF
0000	0010	1010	1011	1111	→	02ABF
0000	0010	1010	1110	1111	→	02AEF
0000	0100	0101	0111	1111	→	0457F
0000	0100	0101	1011	1111	→	045DF
0000	0100	0110	0111	1111	→	0467F
0000	0100	0110	1110	1111	→	046EF
0000	0100	1100	1101	1111	→	04CDF
0000	0100	1100	1110	1111	→	04CEF
0000	1000	1001	1011	1111	→	089BF
0000	1000	1001	1101	1111	→	089DF
0000	1000	1010	1011	1111	→	08ABF
0000	1000	1010	1110	1111	→	08AEF
0000	1000	1100	1101	1111	→	08CDF
0000	1000	1100	1110	1111	→	08CEF

表 2 4次元超立方体の単体分割

が成り立つことを表す. なぜなら, ちょうつがい 13 の場合,  $1 \text{ xor } 3 = 2$  であり,  $(0, 0, 1)$  方向と  $(1, 0, 0)$  方向には動いていないからである. つまり,

$$\text{ちょうつがい } \alpha\beta \equiv (\text{ちょうつがい } \alpha\beta \text{ xor } 44)^{++}$$

$$\text{ちょうつがい } \alpha\beta \equiv (\text{ちょうつがい } \alpha\beta \text{ xor } 55)^{+++}$$

なども成り立つ. ただし  $\alpha \text{ xor } \beta = 7$  の場合, つまりハミング距離が 3 の場合は辺

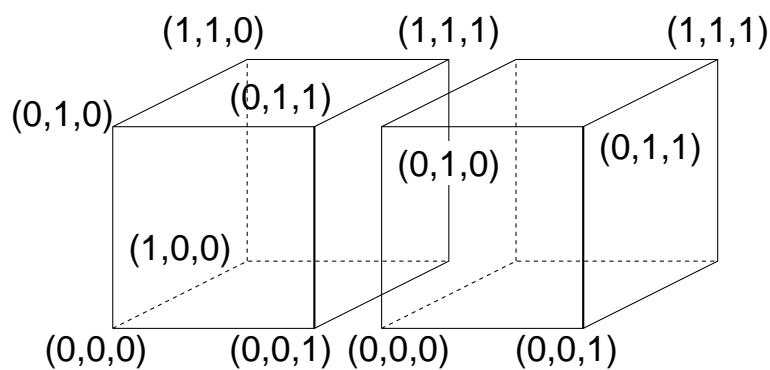


図 7 接触している 2 つの立方体

が立方体の内部にあるために, 他の接触している立方体の辺と同一視されることはない.

3次元から4次元の場合を類推する. 4次元単体 0137F の一つのちょうつがい 013 を例にとると, これは

$$0 \text{ xor } 3 = 3$$

なので,  $(1, 0, 0, 0)$  方向と  $(0, 1, 0, 0)$  方向には動いていない. 従って

$$\text{ちょうつがい } \alpha\beta\gamma \equiv (\text{ちょうつがい } \alpha\beta\gamma \text{ xor } 444)^{++}$$

$$\text{ちょうつがい } \alpha\beta\gamma \equiv (\text{ちょうつがい } \alpha\beta\gamma \text{ xor } 888)^{+++}$$

$$\text{ちょうつがい } \alpha\beta\gamma \equiv (\text{ちょうつがい } \alpha\beta\gamma \text{ xor } CCC)^{++++}$$

が成り立つ. 具体的に書くと, ちょうつがい 013 を  $(0, 1, 0, 0)$  方向 (=444) に動かすことによりちょうつがい 457 と同一視できることが分かり,  $(1, 0, 0, 0)$  方向 (=888)

に動かすと 89B,(1, 1, 0, 0) 方向 (=CCC) に動かすと CDF と同一視できることが分かる. ただし,  $\alpha \mathbf{xor} \gamma = F$ つまりハミング距離が 4 の時は辺が超立方体の内部にあるため, 他の超立方体の辺と同一視されることはない. このように, 排他的論理和によって動いている方向を求め, 動いていない方向の辺とは同一視して処理すれば良い.

### 3.2.3 辺の長さの計算

元々Regge は, 座標系に依存しないことが Regge Calculus の特徴だと述べているが, 今回は計算の簡略化のためにあえて座標系を導入した.

今回導入したのは極座標系  $(r, \theta, \phi)$  で, 重力場には原点に関し球対称の条件をおいた. これらにより, 時間を付化した 4次元空間上の 2点の差  $(\Delta t, \Delta r, \Delta \theta, \Delta \phi)$  の長さは次式で計算できる.

$$\Delta s^2 = A(r)\Delta t^2 + B(r)\Delta r^2 + r^2\Delta \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \Delta \phi^2$$

$A(r)$  と  $B(r)$  は計量テンソルで, これを数値計算によって求めるのが今回の実験の目的である. 計量テンソルさえ求まれば時空の性質を決定できることが, 微分幾何学により分かっている.

## 3.3 シミュレーション

本節では, 3.1節で導いた Regge 方程式と 3.2節で導いた単体の符号化法を用いてモンテカルロシミュレーションを行なう. 単体は充分小さいとし, 一つの立方体の中で計量テンソルは一定だとする.

### 3.3.1 アルゴリズム

以下のアルゴリズムによりシミュレーションを行なう (図 8参照).

1. 全空間を単体に分割する
2. 全単体に付属する計量テンソルを初期化する

3. 全ての辺の長さを初期化する
4. 全ての「ちょうつがい」をリストアップする
5. 全ての辺をリストアップする
6. 全ての欠損角を初期化する
7. 以下を全空間において, 一定の回数ずつ行なう
  - (a) 計量テンソルをランダムに変化させ, 立方体を歪ませる
  - (b) Regge 方程式を評価する
  - (c) Regge 方程式の評価値がゼロに近付いていなければ, 計量テンソルの変化を元に戻す

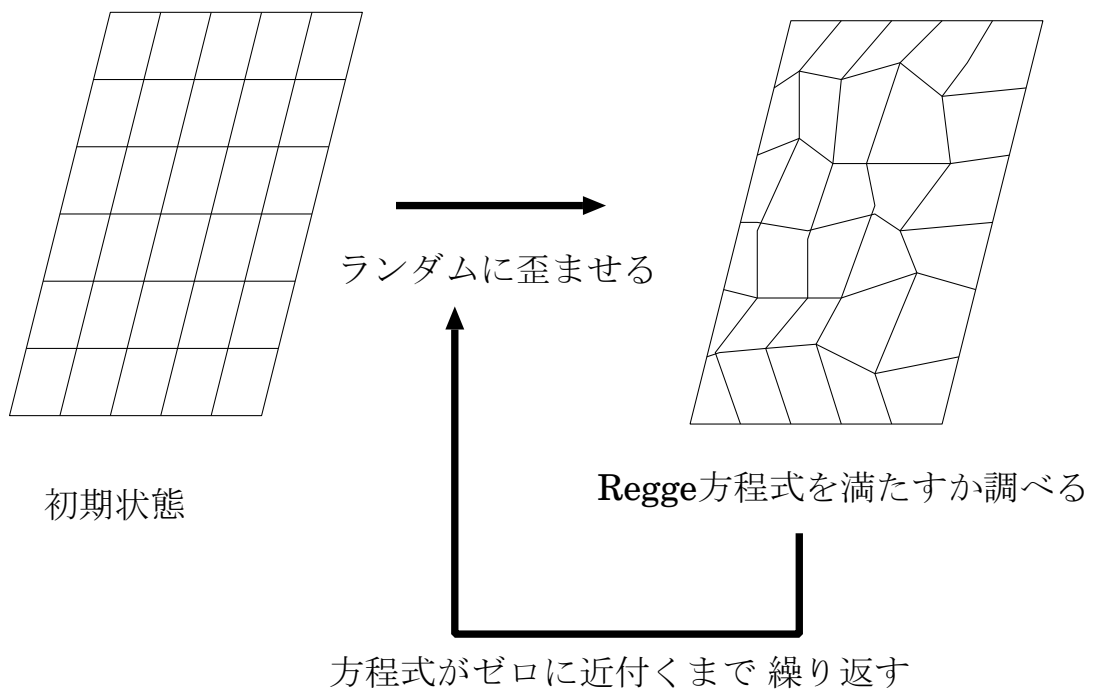


図 8 モンテカルロ法による Regge 方程式の解法アルゴリズム

### 3.3.2 結果例

今回は計算速度向上のため、球対称の重力場を仮定した。この場合既に述べたように、微小線素は

$$ds^2 = A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

とかける。この計量テンソル  $A(r)$  と  $B(r)$  には解析解が存在するため、数値解との比較ができる。結果例を図 9 に示す。縦軸が計量テンソルの値、横軸が原点からの距離を表す。解析解により、 $A(r)B(r) = 1$  が成り立つことが分かっている。そ

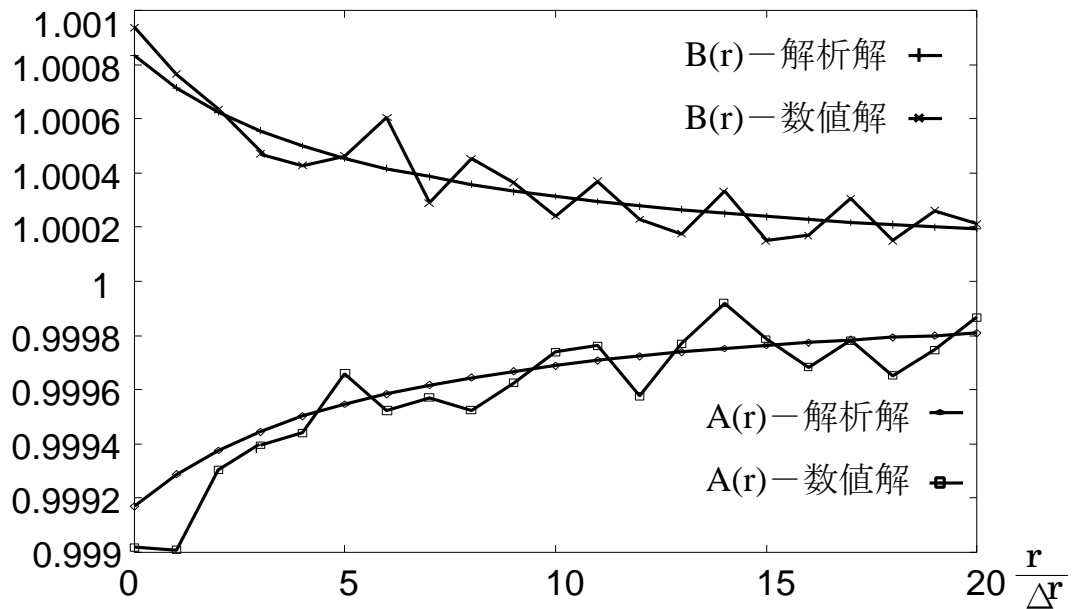


図 9 球対称重力場での Regge 方程式のモンテカルロ法による解

れを考慮し数値解のグラフを見てみると、原点に近い内は逆数の関係になっていることが読みとれるが、原点から離れるにつれ逆数関係が成り立たなくなっているのが分かる。



### 3.4 考察

本稿では空間の単体分割の手法と座標系の導入による辺の長さの計算法を考案したが、計量テンソルを完全に決定するには本手法は完全ではない。その理由の最大のもは、計量テンソルは  $r$  のみの関数とした点である。実際には重力源の質量をもパラメータとする  $A(r, m), B(r, m)$  として実験を行なうべきである。図 5 ではたまたま  $m=1$  の解析解に近い値が出ているが、結果がループ回数などにより変化することが予想できる。又、連立方程式の解法に採用したモンテカルロ法についても効率性に欠けるといえる。今回のような球対称の条件が無い場合は爆発的に計算時間がかかるであろう。ただし、考案手法自体は球対称の条件には依存していない。

従って次章の実験では Regge Calculus による計量テンソルの導出法は使用せず、解析的に求めた計量テンソルを使用して実験を行なう。

## 4. 重力場光線追跡法

コンピュータグラフィックスの手法の中で、レイ・トレーシング法は簡単にリアルな映像が作成できることから、広く研究されている。その手法の欠点としては、計算時間がかかることの他に光線が直進するという暗黙の了解があることが上げられる。光は通常は確かに直進するので問題は無い。しかし光が直進しない物理現象も考えられる。空気中に熱源があり屈折率が変化して光が直進しない場合が斉藤らによって研究され [26], 強い重力源の近くで空間そのものが歪み, 空間に沿って進む光も結果的に曲がって進む場合の研究が山下 [11] や著者 [27] によって行なわれている。物体が超高速運動を行なっている場合もまた歪んだ空間の幾何学として定式化できるが, 物体が光速に近い速度で運動している物体から見た情景や, 光速に近い速度で運動している物体を見た場合の画像についての研究が東大大型計算機センターやカーネギーメロン大学などで行なわれてきた [12]。これらの研究は4次元の幾何学である相対性理論を3次元グラフィックスとして直観的に分かりやすく可視化するのに成功しているが, それぞれ仮定が強くまだまだ改良の余地がある。

本研究はさらに正確な重力場のシミュレーションを行ない, それを高速に可視化することを目標とする。まず初めに相対性理論から, シミュレーションに適した時間発展パラメータの微分方程式を導く。その際に用いられる公式群については, 付録にて証明している。次にベクトル解析を用いて回転行列を使用しないで座標変換を行なうアルゴリズムを提案する。そして適応的に刻幅を変化させながら数値計算を行なっていく方法で微分方程式を解いて歪んだ空間にレイ・トレーシング法を適用し, 重力場の画像を作成する。最終的には, 真空中に仮想的なブラックホールを配置し, その周辺で運動する物体の可視化を行なう。この結果は山下や著者の過去の研究に比べ, 物体の相対論的運動を考慮した点で進歩していると言える。

## 4.1 運動方程式の導出

本節では重力場方程式の解である計量テンソルを計算し、それを元に光線と物体の運動方程式を導く。

### 4.1.1 計量テンソルの計算

原点に関する球対称時空という仮定により、

$$ds^2 = -A^2 d\tau^2 + B^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.1)$$

とおく。つまり計量テンソルを

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -A(r)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

とする。すると計量テンソルの行列式は

$$g = -r^4 A^2 B^2 \sin^2 \theta \quad (4.2)$$

となる。また、*Mathematica* を使いリーマンのスカラー曲率  $R$  を計算すると

$$R = \frac{2(-AB + AB^3 - 2rBA' + 2rAB' + r^2 A'B' - r^2 BA'')}{r^2 AB^3} \quad (4.3)$$

となる。アインシュタインの重力場方程式は

$$\delta \int R \sqrt{-g} d^4 x = 0$$

と表されるので  $R\sqrt{-g}$  を計算すると、式 (4.2) と式 (4.3) より

$$\begin{aligned} R\sqrt{-g} &= \frac{2(-AB + AB^3 - 2r(A'B - AB') - r^2(A''B - A'B'')) \sin \theta}{B^2} \\ &= 2 \left\{ -\frac{A}{B} + AB - 2r \left( \frac{A}{B} \right)' - r^2 \left( \frac{A'}{B} \right)' \right\} \sin \theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる. これの項別に  $r$  についての変分を取ると

$$\delta \int \frac{A}{B} dr = \int \left( -\frac{A}{B^2} \delta B + \frac{\delta A}{B} \right) dr \quad (4.5)$$

$$\delta \int AB dr = \int (\delta AB + A \delta B) dr \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \delta \int r \left( \frac{A}{B} \right)' dr &= -\delta \int \frac{A}{B} dr \\ &= \int \left( -\frac{\delta A}{B} + \frac{A}{B^2} \delta B \right) dr \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \delta \int r^2 \left( \frac{A'}{B} \right)' dr &= -2 \int r \left( \frac{A'}{B} \right) dr \\ &= -2 \int \left( r \frac{\delta A'}{B} - \frac{A}{B^2} \delta B \right) dr \\ &= -2 \int \left\{ -\left( \frac{1}{B} - \frac{rB'}{B^2} \right) \delta A - \frac{A}{B^2} \delta B \right\} dr \end{aligned} \quad (4.8)$$

という式が得られ, さらに式 (4.5) から式 (4.8) までの  $\delta A$  に関する項を整理すると

$$-\frac{1}{B} + B + \frac{2}{B} - \frac{2}{B} + \frac{2rB'}{B^2} = -\frac{1}{B} + B + \frac{2rB'}{B^2} \quad (4.9)$$

を得ることができ, ついで  $\delta B$  に関する項を整理すると

$$\frac{A}{B^2} + A - \frac{2A}{B^2} - \frac{2rA'}{B^2} = -\frac{A}{B^2} + A - \frac{2rA'}{B^2} \quad (4.10)$$

を得る. 式 (4.9), 式 (4.10) より,

$$\delta \int R \sqrt{-g} d^4 x = 2 \int \left\{ \left( -\frac{1}{B} + B + \frac{2rB'}{B^2} \right) \delta A + \left( -\frac{A}{B^2} + A - \frac{2rA'}{B^2} \right) \delta B \right\} \sin \theta dx^3 \quad (4.11)$$

と計算できる. すると式 (4.11)=0 とおくことにより,  $\delta A$  と  $\delta B$  は任意だから微分方程式

$$\frac{1}{B} + B + \frac{2rB'}{B^2} = 0 \quad (4.12)$$

$$-\frac{A}{B^2} + A - \frac{2rA'}{B^2} = 0 \quad (4.13)$$

を得る. 式 (4.12) より得られる

$$B' - \frac{B}{2r} + \frac{B^3}{2r} = 0 \quad (4.14)$$

なる式において,  $z = B^{-2}$ とおくと  $z' = -2B^{-3}B'$ となることを考え変形すると,  
微分方程式

$$\begin{aligned} -2B^{-3}B' + \frac{B^{-2}}{r} - \frac{1}{r} &= z' + \frac{z}{r} - \frac{1}{r} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

を得る. これより,

$$\begin{aligned} rz' + z &= 1 \\ (rz)' &= 1 \\ rz &= r + c \\ z &= 1 + \frac{c}{r} \end{aligned}$$

となり, これは

$$B^2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + \frac{c}{r}} \tag{4.16}$$

を意味する. また, 式(4.12)  $\times A'$  + 式(4.13)  $\times B'$ を計算すると

$$\begin{aligned} -\frac{A'}{B} + A'B - \frac{AB'}{B^2} + AB' &= -\frac{(AB)'}{B^2} + (AB)' \\ &= (AB)' \left(1 - \frac{1}{B^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり,  $1 - 1/B^2 \neq 0$  とすると

$$\begin{aligned} (AB)' &= 0 \\ AB &= c' \\ A &= \frac{c'}{B} \\ &= c' \sqrt{1 + \frac{c}{r}} \end{aligned}$$

なる式を得る. ここで,  $r \rightarrow \infty$  で  $A \rightarrow 1$  とすると  $c' = 1$  とおけるから, 解

$$A^2 = 1 + \frac{c}{r} \tag{4.17}$$

を得る. 特殊相対論的考察により, 通常  $1 + c/r < 1$  となることが分かるので積分定数  $c$  は  $-r_g$  とおかれ, ブラックホール半径と呼ばれる. 結局,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

を得る.

#### 4.1.2 運動方程式の導出

運動する物体として, 本稿では質量が無視できるテスト粒子と呼ばれる粒子を扱う. 運動する物体自体の質量が大きいと, 物体の存在そのものが時空を歪めることになり, 問題が大変複雑になるからである. 質量が無視できる粒子は測地線に沿って運動するので, 運動方程式は式 (A.23) となる.

*Mathematica* を用い, 式 (4.18) を使ってクリストッフエル記号を計算すると

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{r_g}{2r(r - r_g)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{c^2 r_g (r - r_g)}{2r^3} & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{\sin 2\theta}{2} \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{r_g}{2r(r - r_g)} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} \\ \Gamma_{22}^1 &= r_g - r & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \\ \Gamma_{33}^1 &= (r_g - r) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

というような係数群が得られ, これらを式 (A.23) に代入すると

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{r_g}{r(r - r_g)} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{c^2 r_g (r - r_g)}{2r^3} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{r_g}{2r(r - r_g)} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + (r_g - r) \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 \\ + (r_g - r) \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (4.22)$$

なる連立微分方程式を得る. 式 (4.21) より, 初期値として  $\theta = \pi/2, d\theta/ds = 0$  を取れば  $d^2\theta/ds^2 = 0$  となることが分かる. つまり始めに粒子がある平面上を運動していれば, 粒子の運動はその平面上に限られる. 従って  $\theta = \pi/2$  を式 (4.19)-式 (4.22) に代入すると連立方程式は次のようになる.

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{c^2 r_g (r - r_g)}{2r^3} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{r_g}{2r(r - r_g)} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + (rg - r) \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (4.25)$$

ここで, 式 (4.19) より

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{r_g}{r^2} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left\{ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{ds} \right\} &= 0 \\ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{ds} &= c_1 \end{aligned}$$

のように微分方程式を簡略化でき, 次式を得る.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{c_1}{1 - r_g/r} \quad (4.26)$$

また, 式 (4.25) より

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2\phi}{ds^2} + 2r \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\phi}{ds} \right) &= 0 \\ r^2 \frac{d\phi}{ds} &= c_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

と簡略化でき、次式が得られる.

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{c_2}{r^2} \quad (4.28)$$

さらに、式(4.26), 式(4.28) を式(4.23) に代入することにより

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{r_g}{2r(r-r_g)} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{c^2 r_g c_1^2}{2r(r-r_g)} + \frac{c_2^2(r_g-r)}{r^4} = 0 \quad (4.29)$$

を得る.

ところで、速度が光速の粒子である光子について、 $\theta = \pi/2$  と  $ds^2 = 0$  より

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \quad (4.30)$$

が成り立つ. 式(4.26),(4.28),(4.29),(4.30) を連立することにより

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{c_2^2}{r^3} - \frac{3c_2^2 r_g}{2r^4} \quad (4.31)$$

を得る. 速度が光速以下のテスト粒子については、 $\theta = \pi/2$  と  $ds^2 \neq 0$  より

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 1 \quad (4.32)$$

が成り立つ. 光子の場合と同様に式(4.26),(4.28),(4.29), (4.32) を連立させることにより

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{r_g}{2r^2} + \frac{c_2^2}{r^3} - \frac{3c_2^2 r_g}{2r^4} \quad (4.33)$$

を得る.

次にこれらの方程式を、1階でパラメータが  $t$  の常微分方程式に変換する. まず光子の場合、式(4.26) より  $r \rightarrow \infty$  で  $dt = ds$  とすると  $c_1 = 1$  となり、

$$\frac{ds}{dt} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad (4.34)$$

となる. すると

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{c_2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \end{aligned} \quad (4.35)$$



を得る. 一方,  $dr/ds = p$  とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= p \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \left(\frac{c_2^2}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{c_2^2 r_g}{r^4}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\end{aligned}\quad (4.37)$$

といった微分方程式を得る. 次にテスト粒子の場合,  $ds^2 = -d\tau^2$  なる固有時間パラメータを導入すると式 (4.33) は

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{r_g}{2r^2} - \frac{c_2^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{c_2^2 r_g}{r^4}\quad (4.38)$$

となるので, あとは光子と同様の処理で

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{r_g}{r}\quad (4.39)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{c_2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\quad (4.40)$$

$$\frac{dr}{dt} = p \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\quad (4.41)$$

$$\frac{dp}{dt} = \left(-\frac{r_g}{2r^2} - \frac{c_2^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{c_2^2 r_g}{r^4}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\quad (4.42)$$

という連立常微分方程式を得る.

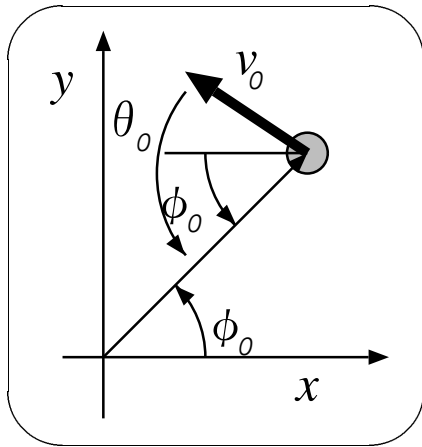


図 10 粒子の発射角度

ところで, 積分定数  $c_2$  は以下のようにして決定することができる. 平面上の極座標表現から

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

とおけ, これらを微分して次式を得る.

$$\begin{cases} x' = r' \cos \phi - r \phi' \sin \phi \\ y' = r' \sin \phi + r \phi' \cos \phi \end{cases}$$

つまり

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \phi' \end{pmatrix}$$

とも書けるので, 逆行列をかけることにより次式を得る.

$$\begin{pmatrix} r' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi / r & \cos \phi / r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

図 10 のように, 物体の初速度  $v_0$  と原点に対する角度  $\theta_0$  が与えられているとすると

$$\begin{cases} x' = -v_0 \cos(\theta_0 - \phi_0) \\ y' = v_0 \sin(\theta_0 - \phi_0) \end{cases}$$

という関係式が成り立つので, これを式 (4.43) に代入することにより次式を得る.

$$\begin{aligned} r'(0) &= -v_0 \cos(\theta_0 - \phi_0) \cos \phi_0 \\ &\quad + v_0 \sin(\theta_0 - \phi_0) \sin \phi_0 \\ &= -v_0 \cos \theta_0 \\ \phi'(0) &= -\frac{v_0}{r} \sin(\theta_0 - \phi_0) \cos \phi_0 \\ &\quad + \frac{v_0}{r} \cos(\theta_0 - \phi_0) \sin \phi_0 \\ &= \frac{v_0}{r} \sin \theta_0 \end{aligned}$$

これを式 (4.27) に代入すると,  $c_2$ は

$$\begin{aligned} c_2 &= r^2 \phi'(0) \\ &= r_0 v_0 \sin \theta_0 \end{aligned}$$

と決定できる.

次節では, 光子の微分方程式群式 (4.34) から式 (4.37) 及びテスト粒子の微分方程式群式 (4.39) から式 (4.42) を数値的に解く方法について述べる.

## 4.2 刻幅適応変化アルゴリズム

今回使う微分方程式は 1 階の常微分方程式なので, 本節では  $x$  の関数  $y$  についての常微分方程式  $dy/dx = f(x, y)$  を解く方法について述べる. 基本的には  $y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x, y)$  という差分スキームを繰り返すが, 本実験ではブラックホールの近傍と, 中心から遠くはなれた地点とでは  $y$  の傾きが大きく変化することが予想されるため, 刻幅  $\Delta x$  が一定では計算速度, 精度共に向上が望めない. そこで Fehlberg 公式を用いて計算精度を推測し, 適応的に刻幅を変化させるアルゴリズム [28] を改良して使う.

Fehlberg 公式を使い,  $y_n, x_n$  から打ち切り誤差の違う 2 種類の  $y_{n+1}$  を計算し, その差を推定誤差  $Err$  とする. つまり,  $dy/dx = f(x, y)$  として

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x f(x, y) \\ k_2 &= \Delta x f\left(x + \frac{1}{4}\Delta x, y + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 &= \Delta x f\left(x + \frac{3}{8}\Delta x, y + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\ k_4 &= \Delta x f\left(x + \frac{12}{13}\Delta x, y + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\ k_5 &= \Delta x f\left(x + \Delta x, y + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\ k_6 &= \Delta x f\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, y - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$Err = |y_{n+1}(\text{誤差}\Delta x^5) - \hat{y}_{n+1}(\text{誤差}\Delta x^4)|$$

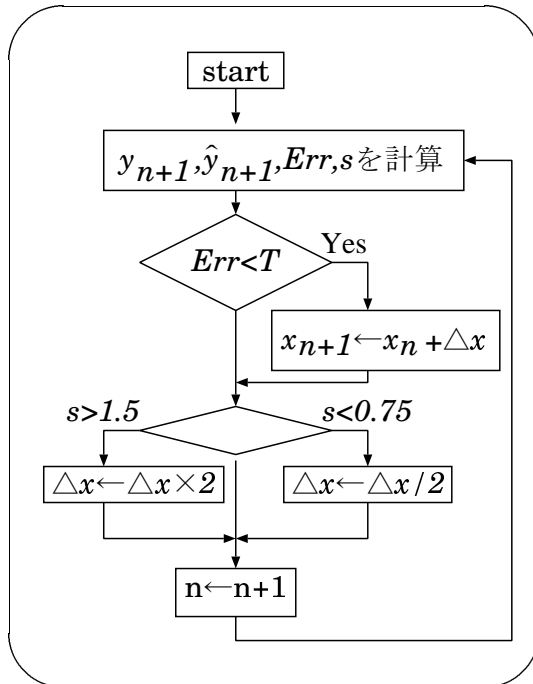


図 11 刻幅適応変化アルゴリズム

そして誤差許容範囲  $T$  を適当に定め、誤差推定係数  $s$  を次式で定義する.

$$s = 0.8 \sqrt[4]{\frac{\Delta x T}{Err}}$$

これは文献 [28] の刻幅決定式より今回の実験に適するよう係数を調節したものである. この誤差推定係数  $s$  を使い図 11 に示すアルゴリズムで  $y_{n+1}(x_n, y_n)$  を計算する. このアルゴリズムにより、傾きが小さく変化の少ない時は大きな刻幅で、傾きが大きく変化が多きときは小さい刻幅で差分スキームを計算していく.

### 4.3 座標変換

レイ・トレーシング法において、全空間である世界座標系の他に視点の見える視野座標系、物体の運動を表す運動座標系というものが存在し、それらを世界座標系に変換する必要がある. 本節では、過去のレイ・トレーシング法では三角関数を用いた 3 次元の回転行列を使って計算していたものを、より簡潔にベクトルの線形和で変換する方法を考案したので、それについて述べる.

#### 4.3.1 世界座標系と運動平面座標系

今回のシミュレーションでは、重力場が原点に関して対称であるという仮定をおくために物体の運動は同一平面上に限られる. このことから平面の世界座標に

おける基底ベクトルを求めておくと, 回転行列を用いずに運動座標と世界座標間の座標変換を行なうことができる.

運動平面は原点と視点を含み, 視点の位置ベクトルと視線ベクトルの両方に直交するベクトルを法線ベクトルとして持つ. この平面の正規直交座標系は次のように構成される.

まず, $x$ 方向の基底ベクトル $\mathbf{P}_x$ を視点の位置ベクトル $\mathbf{V}$ の単位ベクトルと定める.

$$\mathbf{P}_x = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} \quad (4.44)$$

次に  $y$ 方向の基底ベクトルを, $\mathbf{P}_x$ と視線ベクトル $\mathbf{E}$ からシュミットの方法を用いて構成する.

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} \mathbf{V} \quad (4.45)$$

すると運動平面上の点  $(x, y)$  の世界座標系での位置 $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ は

$$\mathbf{r} = x\mathbf{P}_x + y\mathbf{P}_y \quad (4.46)$$

と変換される. 通常の  $x$  軸, $y$  軸, $z$  軸周りの回転を回転行列を使って計算することを考えると, 式 (4.46) は非常に見通しの良い式だといえる.

### 4.3.2 世界座標系と視野座標系

スクリーンの  $z$ 方向基底ベクトル $\mathbf{Z} = (Z_x, Z_y, Z_z)$ は, あらかじめ与えられているとする. また, スクリーンの  $x$ 方向単位基底ベクトル $\mathbf{X} = (X_x, X_y, X_z)$ は, 世界座標系での  $z$ の値  $X_z$ をゼロとする.

$$\begin{cases} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = 1 \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{Z} = 0 \end{cases}$$

この時,  $\mathbf{X}$ の世界座標系での成分を求めると次のようになる.

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{Z_y}{\sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}} \\ X_y &= \frac{Z_x}{\sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}} \\ X_z &= 0 \end{aligned}$$

そして  $\mathbf{Y} = (Y_x, Y_y, Y_z)$  を

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$$

とすれば、直交座標系  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  を定義できる。これらの基底ベクトルを使うと、視点からスクリーン上の点  $(i, j)$  を見ている時の視線ベクトル  $\mathbf{E}$  は次のように表される。

$$\mathbf{E} = i\mathbf{X} + j\mathbf{Y} + \mathbf{Z} \quad (4.47)$$

この変換式により、視野座標系  $(i, j)$  から世界座標系  $(x, y, z)$  での視線ベクトル  $(E_x, E_y, E_z)$  の変換が可能となる。

#### 4.4 視線追跡法

今回は光線追跡法を、無駄な計算を行なわないように改良した視線追跡法を用いる。それには、次の一連の計算をスクリーンの大きさだけ繰り返す。計算時間の短縮のため、2次反射などは考えない。

1. 視点からスクリーン上の一点  $(i, j)$  への視線ベクトルを式 (4.47) により求める。
2. 視点から視線方向に発せられた光の運動平面を求める。つまり、式 (4.44)-(4.45) より、二つの直交ベクトルにより張られる平面を構成する
3. 視点から視線を発して物体にぶつかるかを調べる。平面上で微分方程式を解き座標  $(x, y)$  を求め、式 (4.46) により世界座標に変換し、物体との交差関係を調べる。その結果視線が物体にぶつかっていたら、画面上の点  $(i, j)$  に点を打つ。

#### 4.5 実験

本節では、光子及びテスト粒子の2次元平面上での運動のシミュレーションを行なってから、3次元空間内での重力場光線追跡法による画像作成を行なう。

#### 4.5.1 平面上での実験

3次元CGを作成する前に,作成した数値計算やグラフィックスのルーチン,アルゴリズムが妥当であることをテストするために平面上でのシミュレーションを行なう. スクリーンの大きさは  $500 \times 500$  画素,ブラックホールの質量は  $1 \times 10^{20} kg$  とした.

##### 1. テスト粒子のシミュレーション

ブラックホール半径  $r_g$  の外側の一点からテスト粒子を発射し,軌道を追った. 図12ではブラックホールに吸い込まれてしまっている. 図13では「バラの花型」と呼ばれる水星の軌道をシミュレートしている.

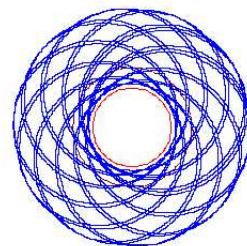
##### 2. 光子のシミュレーション

ブラックホール半径  $r_g$  の外側に点光源(光子)を置き,30度ごとに光線を発射した(図14,15参照). 空間が歪むために光が曲進しているように見える重力レンズ効果が現れている. 図14において発射角度が原点に対し90度の時には  $r = 1.5r_g$  の円軌道ができており,これも理論と一致している.



theta = 45.0

図12 発射角度が原点に対し45度の場合のテスト粒子の軌道



theta = 90.0

図13 発射角度が原点に対し90度の場合のテスト粒子の軌道

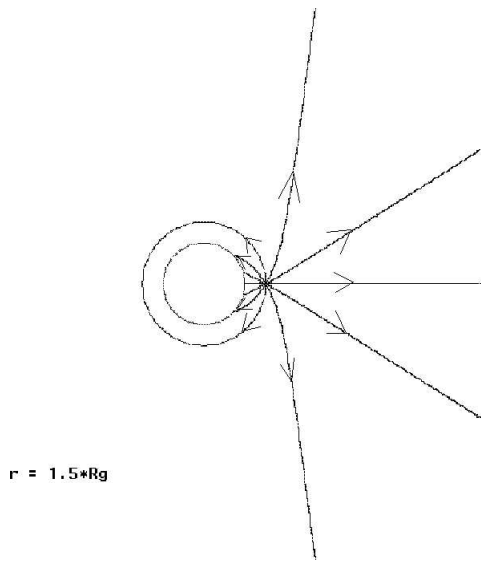


図 14 発光点が原点から  $1.5r_g$  の場合の光子の軌道

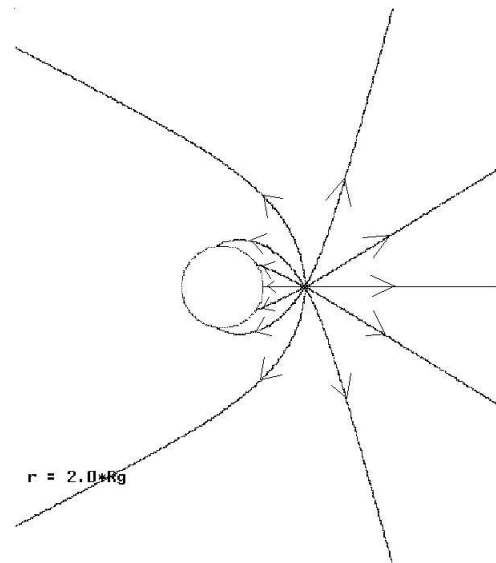


図 15 発光点が原点から  $2.0r_g$  の場合の光子の軌道

#### 4.5.2 空間内での実験

3次元空間内に, 図 16 のように各物体を配置する.

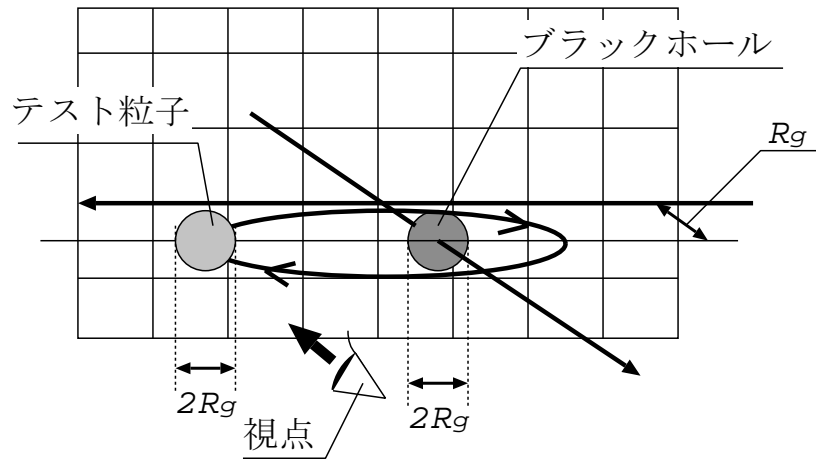


図 16 原点にあるブラックホールと周辺の各物体の配置図



テスト粒子は重さはないがブラックホールと同じ大きさを持つとする。歪み具合を分かりやすくするために、テスト粒子には 90 度ごとに色分けをした。手前半分を左から赤、緑に、後ろ半分を左から青、黄色にしてある。また、テスト粒子も背景の格子パターンも自らが光を発しているとする。ブラックホールの質量は  $10^{21}kg$ 、テスト粒子の半径は約  $15km$  に設定してある。視点は原点から左に  $15km$ 、手前  $60km$  の所にある。テスト粒子はブラックホールより左  $40km$  のところから、ブラックホールに向かって角度 85 度で光速の 90% の速度で発射されている。

レイ・トレーシングを行ない、テスト粒子がブラックホールの周りを約 60 コマで回るアニメーションを制作したので、図 17 から図 19 に抜粋して紹介する。画面サイズは  $300 \times 300$  画素で、計算速度は SGI Challenge の 36CPU マシンで一コマ約 15 分である。プログラムは視線一本が CPU 一つに対応するよう並列化されている。

## 4.6 考察

今回はブラックホールの周りを相対論的に運動する物体を重力場によって曲がって進む光の軌跡を追うことで可視化したが、依然以下のような仮定が存在した。

1. 運動する物体自身が光を発している。
2. 運動物体の質量は無視できる。
3. 運動物体の大きさは無視できる。
4. 運動物体の速度は光に比べ十分に遅い。
5. 重力源は球対称の場である。
6. 光のドップラー効果や赤方偏位は考慮しない。

これらは今後の研究により改良されなければならない。特に、運動物体の速度が光速より遅いことなどは現実に十分考えられることであるが、運動物体が光を発しているということが現実に起こることは少ない。従って今回配置したブラックホール、運動物体の他に光源を設置して、光源から発せられた光を運動物体が反射

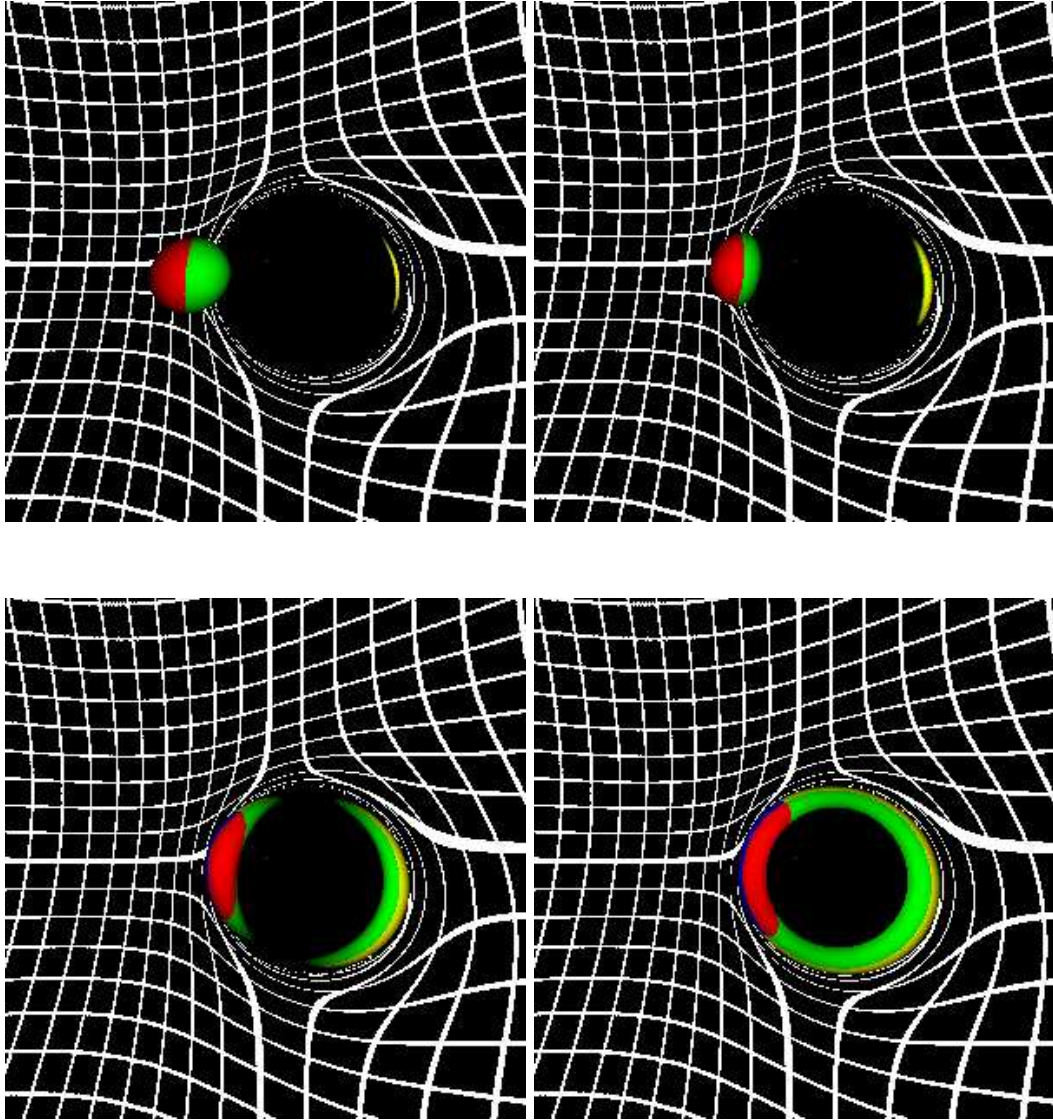


図 17 ブラックホール周囲を, 上から見て時計周りに回る物体

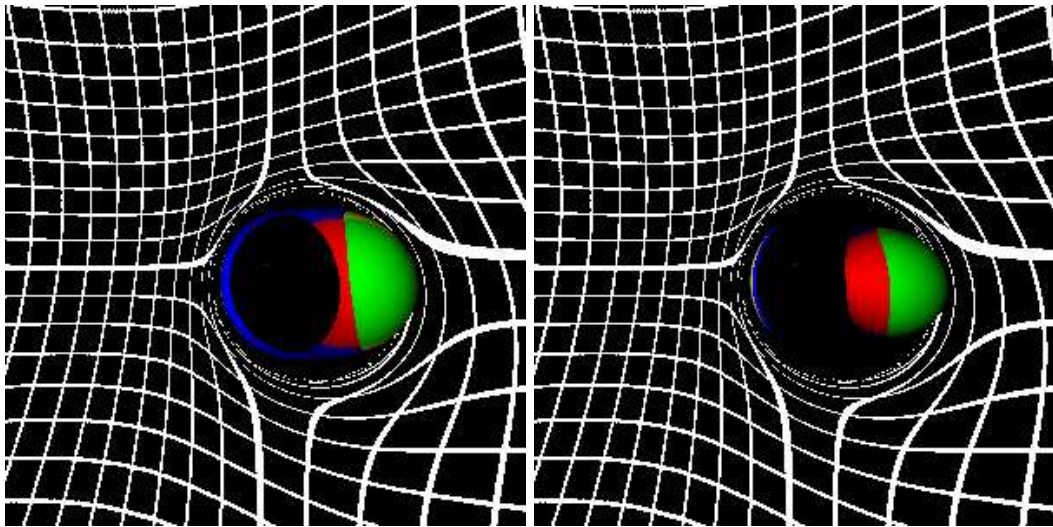
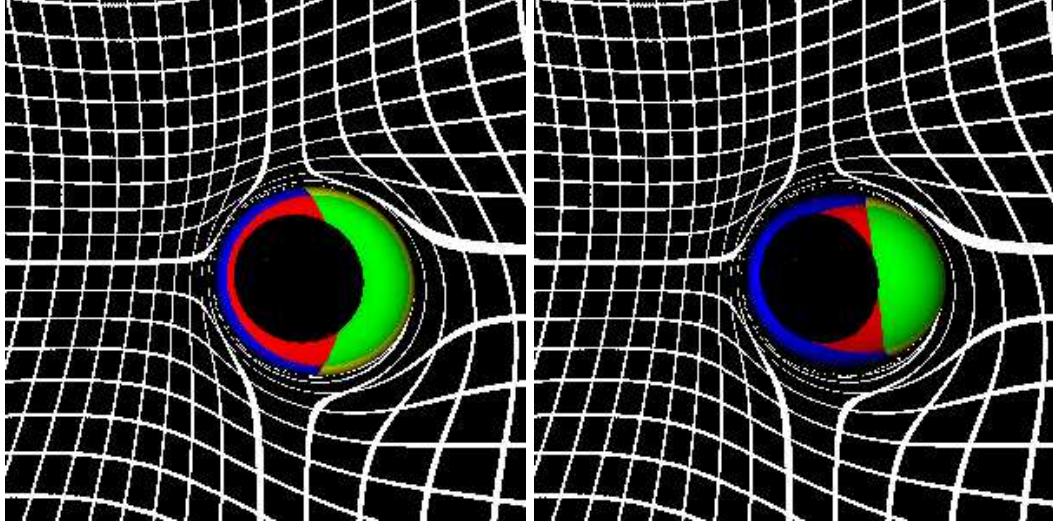


図 18 (続き)

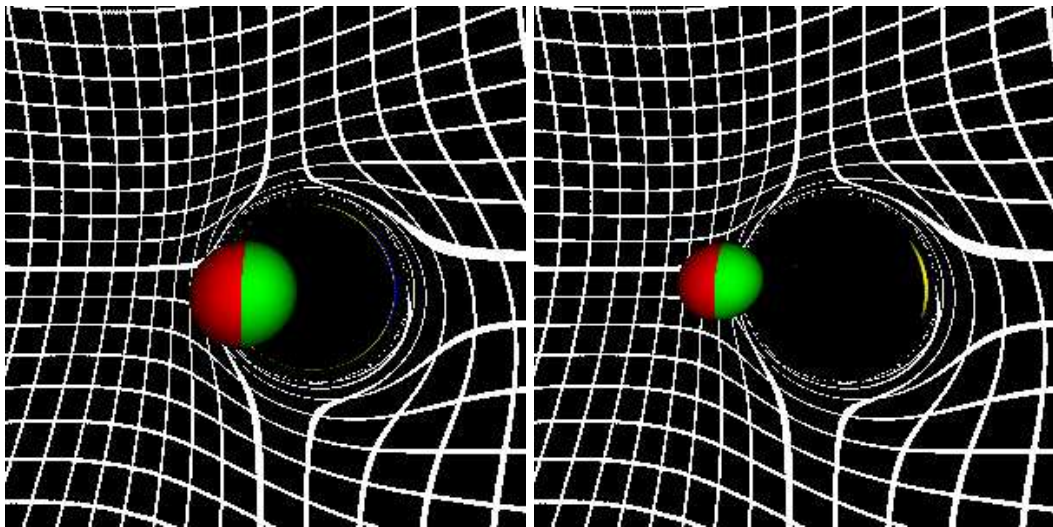
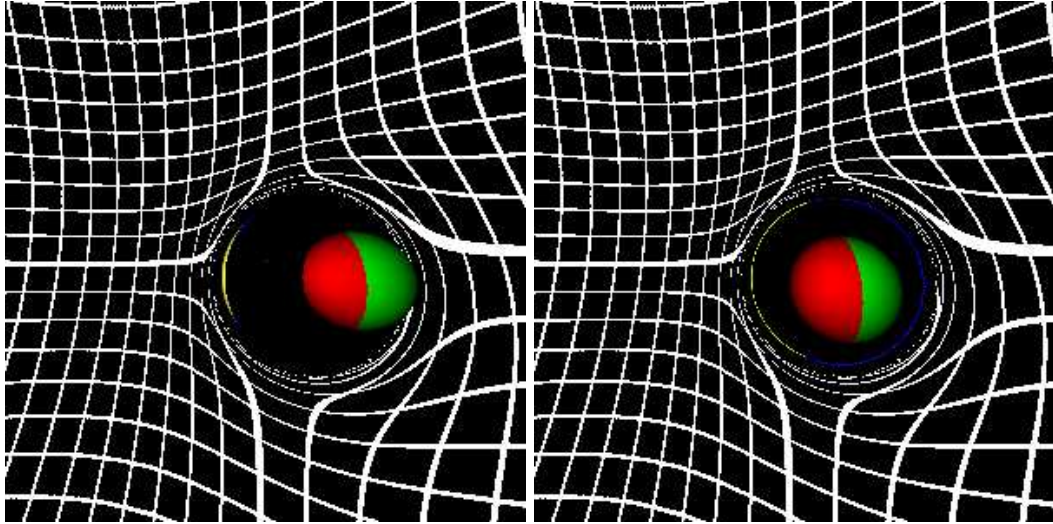


図 19 (続き)

して視点に入る状況を考える必要がある。運動物体の大きさが無視できる、すなわち点であるという仮定を取り去ると、重力によって引き延ばされる物体の様子が可視化でき、より興味深い画像を得ることができると思われる。

また、より分かりやすい可視化を行なうには以下のような拡張が考えられる。

1. 運動する物体の形状を球以外にする。
2. 物体の表面にパターンや画像データをマッピングする。

この他の改良点として、プログラムを高速化し画像データサイズを大きくし、さらに美しい画像を得ることができるということが上げられる。現状の300×300画素はコンピュータグラフィックスとしてはやや小さめである。また、今回の画像では重力場の局所的な情報は分かりにくい。ブラックホール周辺の物体数を増やしたり、ブラックホールを多数の粒子群で被ったと仮定して粒子の速度ベクトル場を作り、そのベクトル場を矢印で可視化するなどの工夫が考えられる。

## 5. おわりに

本論文では, 重力場を可視化する手法についていくつかの提案を行なった. 重力場を表す方程式は 2 階の非線形偏微分方程式で一般的な解析解は求められないので, 数値的に解く手法として **Regge Calculus** の導入を考え, 具体的なアルゴリズムについて検討した.

まず始めに, 4 次元格子空間で **Regge Calculus** を行なう手法について, 単体分割して辺の長さを求め, それを元に角度を計算する方法を提案した. 単体分割をプログラミングするためには各頂点になんらかのラベルを割り当てて区別しなければならないが, 今回は超立方体のある一頂点を原点としたハミング距離によるハミング符号の割当を提案した. そしてその際に発生する隣接頂点の同一視問題について解決法を提案した. この方法は従来行なわれてきた **Regge Calculus** の解法である正多面体で空間を近似する方法に比べて一般性があるが, 単体の辺の長さを計算するために座標系を導入しなければならないこと, 計算時間がかかること, 重力源となる質量と **Regge** 方程式との関係式が導けなかったことなど未完成的な点が残った.

また, 物体の相対論的な運動を追うのに適する微分方程式を導き, 球対称な場での重力場光線追跡法を確立して物体の運動を可視化した. そして計算を高速化するために, 数値計算の細かさを適応的に変化させたり新しい座標変換法を提案するなどの工夫をした. 重力場の可視化の研究は過去に少なく, ニュートン力学ではなく相対論的力学に基づき運動する物体を可視化したという点でも画期的であるが, 現在の最先端のコンピュータグラフィックスの研究に比べると画像の美しさ, 分かりやすさにやや難点が残った.

本研究は **Regge Calculus** によって重力場方程式を解き, その解を用いて可視化を行なうことを目標としたが, 残念ながら **Regge Calculus** にも可視化手法にも改良の余地が多く, 二つを完全に結合するには至らなかった. 近年になって, **Regge Calculus** の計算を簡単にする方法として **Null-strut calculus** [29][30][31] が提案されているので, この方法を導入することにより球対称重力場などの制限条件のない一般的な重力場光線追跡法を確立できるものと考えている.

## 謝辞

本研究の全過程を通して、直接懇切なる御指導、御鞭撻を賜ったソフトウェア基礎講座 横矢 直和教授 に衷心より感謝の意を表します。

本研究の遂行にあたり、終始有益な御助言と御鞭撻を頂いた像情報処理学講座 千原 國宏教授、並びにソフトウェア基礎講座 竹村 治雄助教授 に厚く御礼申し上げます。

そして本研究を通じて、有益な御助言を頂いたソフトウェア基礎講座 岩佐 英彦助手、並びに情報科学センター 片山 喜章助手 に厚く感謝します。

最後に、様々な御協力と御助言を頂いたソフトウェア基礎講座の諸氏に深く感謝します。

## 付録

### A. 数学的準備：リーマン幾何学と一般相対性理論

本付録では、3章、4章において使用されているリーマン幾何学のうち、「リーマン多様体上の測地線の方程式」を導出するまでを示す。そして最後にアインシュタインの重力場方程式を紹介する。

本論文においては、以下のような記法を使用している。

定義 A.1

一つの項の中で変数の上付添字と下付添字に同じものが存在する時、その変数について  $0$  から  $n$  まで和を取ることにする。つまり、

$$a_i b^i = \sum_{i=0}^n a_i b^i$$

これをアインシュタインの加法規約と呼ぶ。

定義 A.2

ある変数  $x^i$  についての偏微分を次のように書くことがある。

$$\frac{\partial y}{\partial x^i} = \partial_i y$$

#### A.1 ベクトル空間

ベクトル空間を、次の公理を満たす元の集合として定義する。



定義 A.3

ベクトル空間  $V$  とは, 任意の元  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  が次の公理を満たす集合のことである.

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2.  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
3.  $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}$  なる  $\mathbf{o}$  が存在する
4.  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}$
5.  $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}, (a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$
6.  $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$
7.  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

A.1.1 ベクトルの成分

あるベクトル  $\mathbf{r} \in R^n$  は, 一次独立な  $n$  個のベクトル  $\mathbf{e}_i \in R^n$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を使い次のように一意に表せる.

$$\mathbf{r} = r^i \mathbf{e}_i$$

$r^i$  のことを, ベクトル  $\mathbf{r}$  の反変成分と呼ぶ.

クロネッカーのデルタを

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots i = j \\ 0 & \cdots i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

で定義すると,  $\mathbf{e}_i$  が正規直交基底なら, 基底同士の内積は

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

だから, 次のようにベクトルから反変成分を取り出すことができる.  $\mathbf{r}$  に  $\mathbf{e}_j$  をかけると

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r} = \mathbf{e}_j \cdot r^i \mathbf{e}_i$$

$$\begin{aligned}
&= r^i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \\
&= r^i \delta_{ij} \\
&= r^j.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

しかし、一般には基底は正規直交基底とは限らないから、 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  は  $\delta_{ij}$  とは限らず、従って  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r}$  も  $r^j$  になるとは限らない。そこで、この二つの量を

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} \tag{A.3}$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r} = r_i \tag{A.4}$$

と置く。  $g_{ij}$  を計量テンソル、  $r_i$  をベクトル  $\mathbf{r}$  の共変成分と呼ぶ。

$g_{ij}$  を使うと、次のような式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r} &= \mathbf{e}_j \cdot r^i \mathbf{e}_i \\
&= r^i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \\
&= g_{ji} r^i
\end{aligned}$$

ところで、  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r} = r_j$  だったから

$$r_j = g_{ji} r^i \tag{A.5}$$

が成り立つことが分かる。さらに、

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \tag{A.6}$$

で  $g^{jk}$  を定義すると、次の式も成り立つ。式 (A.5) の両辺に  $g^{jk}$  をかけ式 (A.6) を使おうと

$$\begin{aligned}
r_j g^{jk} &= g_{jk} g^{jk} r^i \\
&= \delta_i^k r^i \\
&= r^k.
\end{aligned}$$

つまり、  $g_{ij}, g^{ij}$  を使うと

$$\begin{cases} r_j = g_{ji} r^i \\ r^j = g^{ji} r_i \end{cases} \tag{A.7}$$

という規則で添字の上げ下げができると解釈できる.

内積の性質より,

$$g_{ij} = g_{ji}$$

が成り立ち,  $g_{ij}$ は対称行列の成分であることが分かる.

定義 A.4

ベクトル  $\mathbf{r} = r^i \mathbf{e}_i$  に対し, 次の量を定義する.

$$\text{計量テンソル } g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

$$\text{共変成分 } r_j = g_{ij} r^i$$

### A.1.2 反変ベクトルと共変ベクトル

$i$  番目の基底  $\mathbf{e}_i$  が, 他の基底の線形結合で

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{e}'_j \tag{A.8}$$

と書けたとしよう. そしてあるベクトルを  $\mathbf{e}_i$  と  $\mathbf{e}'_i$  を使って 2 通りに表すことを考える.

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{e}'_i$$

これに式 (A.8) を代入すると

$$x^i A_i^j \mathbf{e}'_j = x'^i \mathbf{e}'_i$$

基底ベクトルは 1 次独立だから, 両辺を見比べて

$$x'^i = A_j^i x^j \tag{A.9}$$

と書けることが分かる.

式 (A.9) の両辺を  $x^j$  で微分すると,

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = A_j^i$$

ということが分かり, あらためて  $A_j^i$  に代入し直すと,

$$x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \mathbf{e}'_j \quad (\text{A.11})$$

式 (A.11) は, ダッシュの付いている量とそうでない量を交換すると

$$\mathbf{e}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \mathbf{e}_j \quad (\text{A.12})$$

座標変換をした時, 式 (A.10) のように変化するベクトル成分を反変ベクトル, 式 (A.12) のように変化するベクトル成分を共変ベクトルという.

定義 A.5

座標変換により, 次のように変化する量を反変ベクトルと言う.

$$x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j$$

また, 次のように変化する量は共変ベクトルと言う.

$$x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} x'^j$$

### A.1.3 共変微分

座標によって基底ベクトルの成分も変化する一般座標系を考える. 通常, ベクトルの微分は各成分の微分で定義される. しかし一般座標系では基底ベクトルが変化するから 2 点間での成分の差を考えることは意味がない. そこで,  $\mathbf{r}(x + \Delta x)$  を点  $x$  まで平行移動させて  $\mathbf{r}(x + \Delta x)$  と  $\mathbf{r}(x)$  の始点をそろえ,  $\mathbf{r}(x + \Delta x)$  の成分を  $\mathbf{e}_i(x)$  で展開して引き算をする微分を考える.  $x + \Delta x$  から  $x$  に平行移動したベクトルを,  $\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{e}}$  のように表す.

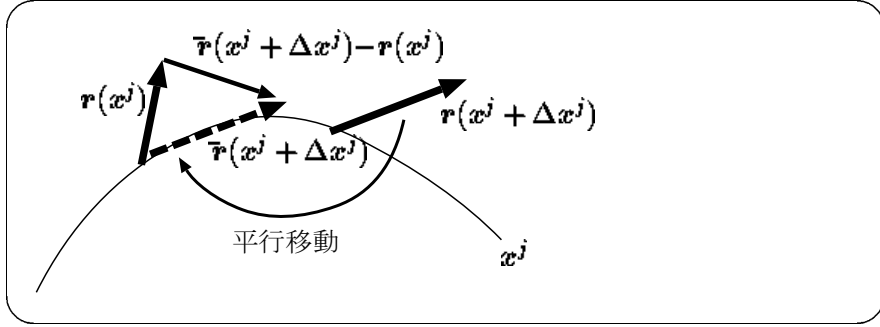


図 20 共変微分

つまり  $\partial \mathbf{e}_i / \partial x^j$  に相当するものを次式で定義する.

$$\nabla_j \mathbf{e}_i = \frac{\bar{\mathbf{e}}_i(x^j + \Delta x^j) - \mathbf{e}_i(x^j)}{\Delta x^j} \quad (\text{A.13})$$

$\bar{\mathbf{e}}_i$  は, 平行移動によって点  $x$  のベクトルになったから,  $\nabla_j \mathbf{e}_i$  も点  $x$  の基底ベクトルによって展開できる. そのときの展開成分を記号  $\Gamma_{ji}^k$  と表す:

$$\nabla_j \mathbf{e}_i = \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.14})$$

この  $\Gamma_{ji}^k$  をクリストッフェル記号と呼ぶ. これを使うと, 次のようにベクトル  $\mathbf{r}$  の共変微分の式を変形できる.

$$\begin{aligned} \nabla_j \mathbf{r}(x^j) &= \frac{\bar{\mathbf{r}}(x^j + \Delta x^j) - \mathbf{r}(x^j)}{\Delta x^j} \\ &= \frac{r^i(x^j + \Delta x^j) \bar{\mathbf{e}}_i(x^j + \Delta x^j) - r^i(x^j) \mathbf{e}_i(x^j)}{\Delta x^j} \\ &= \frac{r^i(x^j + \Delta x^j) (\mathbf{e}_i(x^j) + \Delta x^j \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k(x^j)) - r^i(x^j) \mathbf{e}_i(x^j)}{\Delta x^j} \\ &= \frac{r^i(x^j + \Delta x^j) - r^i(x^j)}{\Delta x^j} \mathbf{e}_i(x^j) + r^i(x^j + \Delta x^j) \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k(x^j) \\ &= \left( \frac{\partial r^i}{\partial x^j} + r^k \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

ここで,

$$\nabla_j r^i = \frac{\partial r^i}{\partial x^j} + r^k \Gamma_{jk}^i \quad (\text{A.15})$$

とおくと、通常の偏微分との対比が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial r^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \leftrightarrow \nabla_j \mathbf{r} = \nabla_j r^i \mathbf{e}_i$$

全く同様の方法で、ベクトルの共変成分についての共変微分も定義できる。

定義 A.6

ベクトルの反変成分の共変微分を次の式で定義する

$$\nabla_j r^i = \frac{\partial r^i}{\partial x^j} + r^k \Gamma_{jk}^i$$

上式を使い、ベクトルの共変微分を次の式で定義する

$$\nabla_j \mathbf{r} = \nabla_j r^i \mathbf{e}_i$$

また、ベクトルの共変成分の共変微分を次式で定義する。

$$\nabla_j r_i = \partial_j r_i - r_k \Gamma_{ij}^k$$

## A.2 リーマン多様体

多様体の各点で正定値の 2 階対称共変テンソル、つまり内積を定義できる多様体をリーマン多様体と言う。

### A.2.1 多様体

$n$  次元微分可能多様体とは、その点の近傍から  $R^n$  の開集合の上に連続的な 1-1 写像が存在するような点の集合のことである。例えば図 21 のように球面は平面と対応がつくから、2 次元多様体である。ベクトル空間は、 $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 \cdots x_n \mathbf{e}_n$  により  $\mathbf{r}$  と  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  との対応がつくから、 $n$  次元多様体である。

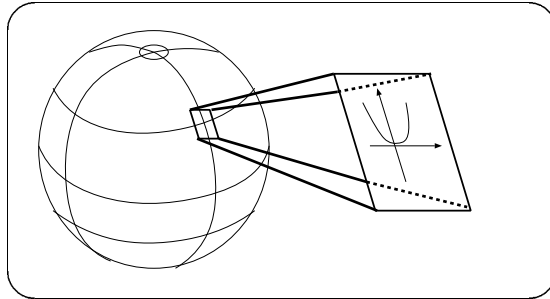


図 21 3次元中の2次元多様体

### A.2.2 ベクトルの内積

ベクトルの内積は, 計量テンソルを使って次のように定義できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a^i e_i \cdot b^j e_j \\ &= a^i b^j e_i \cdot e_j \\ &= a^i b^j g_{ij} \end{aligned}$$

これは,

$$g_{ij} a^i b^j = a_i b^i$$

と書いても良い.

定義 A.7

2つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の内積を, 次の式で定義する.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{ij} a^i b^j$$

### A.2.3 測地線の微分方程式

ベクトルの内積により, 多様体上に距離を導入することができる. ただし多様体上では2点間の最短距離が直線になるとは限らないから, 2点の最短距離を表す線を測地線と呼ぶ.

曲線の方程式を求めるには、微小距離  $ds$  を積分すれば良い。測地線の方程式を求めるには、曲線の方程式の変分をゼロとおく。つまり

$$\begin{aligned}\delta \int ds &= \int \delta ds \\ &= 0\end{aligned}$$

を計算する。

微小なベクトルを

$$d\mathbf{s} = dx^i \mathbf{e}_i$$

とすると、その長さの自乗は

$$\begin{aligned}ds^2 &= d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \mathbf{e}_i dx^i \mathbf{e}_j dx^j \\ &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j dx^i dx^j \\ &= g_{ij} dx^i dx^j\end{aligned}\tag{A.16}$$

となる。式 (A.16) の両辺の変分を取ると

$$2ds\delta ds = ds^i dx^k \partial x^l g_{ik} \delta x^l + 2g_{ik} dx^i d\delta x^k$$

が得られ、この両辺を  $2ds$  で割って積分すると

$$\int \left( \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} \right) ds = 0.$$

しばしば行なわれるように、積分範囲の両端で  $\delta x^k = 0$  であることを考慮して第2項を部分積分すると

$$\int \left( \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l - \frac{dg_{ik}}{ds} \frac{dx^i}{ds} \delta x^k - g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} \delta x^k \right) ds = 0.$$

第2項と第3項の添字  $k$  を  $l$  に変え、 $\delta x^l$  でくくると

$$\int \left( \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{dg_{il}}{ds} \frac{dx^i}{ds} - g_{il} \frac{d^2 x^i}{ds^2} \right) \delta x^l ds = 0.$$



$\delta x^l$ は任意だから、積分がゼロになるためには

$$\frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{dg_{il}}{ds} \frac{dx^i}{ds} - g_{il} \frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0$$

でなければならない. さらに  $g^{lm}$  を乗じて 0 から  $n$  までの和を取り, 全体の符号を変えると

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2} + g^{lm} \frac{dg_{il}}{ds} \frac{dx^i}{ds} - \frac{1}{2} g^{lm} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 0. \quad (\text{A.17})$$

第2項は

$$g^{lm} \frac{dg_{il}}{ds} \frac{dx^i}{ds} = g^{lm} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^i}{ds} \quad (\text{A.18})$$

と書け, ダミー変数  $i$  は  $k$  に変えても良いから

$$g^{lm} \frac{dg_{il}}{ds} \frac{dx^i}{ds} = g^{lm} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (\text{A.19})$$

と書ける. 式 (A.18) と式 (A.19) を足して 2 で割ると

$$g^{lm} \frac{dg_{il}}{ds} \frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{2} g^{lm} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right). \quad (\text{A.20})$$

式 (A.20) を式 (A.17) に代入することにより, 次式を得る.

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{lm} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (\text{A.21})$$

ここで, クリストッフエル記号が

$$\Gamma_{ki}^l = \frac{1}{2} g^{lm} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) \quad (\text{A.22})$$

と書けることを使うと, 次の定理を得る.

定理 A.2

リーマン多様体上の測地線は, 次の方程式に従う.

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2} + \Gamma_{ki}^l \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (\text{A.23})$$

ニュートン力学では外力を受けない物体は直線運動

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$$

を行なうが, 一般相対性理論では直線が測地線に対応し, 式 (A.23) に従って運動を行なう.

### A.2.4 曲率

ユークリッド空間では, あるベクトル  $r_i$  に対し,

$$\frac{\partial^2 r_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 r_i}{\partial x^k \partial x^j} = 0$$

となるが, リーマン幾何学における共変微分では微分の交換がゼロになるとは限らない. そこでその差を

$$\nabla_j \nabla_k r_i - \nabla_k \nabla_j r_i = R_{ijk}^l r_l$$

とおき,  $R_{ijk}^l$  を曲率テンソルと呼ぶ. これはクリストッフェル記号で表すことができ, 次のようになる.

定義 A.8

次の式で定義されるテンソルを, リーマンの曲率テンソルと呼ぶ.

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{lm}^i \quad (\text{A.24})$$

式 (A.24) の階数を 2 つ下げたものをリッチテンソル, 式 (A.24) の階数を 4 つ下げてスカラーにしたものをスカラー曲率と呼ぶ.

定義 A.9

次のテンソルをリッチテンソルと呼ぶ.

$$R_{ij} = R_{ijk}^k \quad (\text{A.25})$$

また, 次の量をスカラー曲率と呼ぶ.

$$R = g^{ij} R_{ij} \quad (\text{A.26})$$

## A.3 一般相対性理論

ニュートンの運動方程式は,  $T$  を運動エネルギー,  $V$  をポテンシャルエネルギーとして作用積分と呼ばれる量

$$I = \int (T - V) dt$$

に対して変分がゼロ,つまり

$$\delta I = 0$$

という計算を行なえば導くことができる. 同様に, アインシュタインの重力場方程式と呼ばれる方程式は,  $R$ をスカラー曲率,  $g$ を計量テンソルの行列式として作用積分

$$I = \int R \sqrt{-g} d^4x$$

に対し

$$\delta I = 0$$

を計算すれば良い. これを計算すると, 次の真空での重力場方程式を導くことができる.

定義 A.10

次の方程式をアインシュタインの重力場方程式と呼ぶ.

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 0 \tag{A.27}$$

重力場方程式は, 計量テンソル  $g_{ij}$ を変数とする. スカラー曲率  $R$  やリッチテンソル  $R_{ij}$ は, 式 (A.24) から分かるようにクリストッフェル記号  $\Gamma_{jk}^i$ の一階微分とクリストッフェル記号同士の積の和で定義される. 式 (A.22) よりクリストッフェル記号は  $g_{ij}$ の一階微分で書けるから, 結局重力場方程式は二階の非線形偏微分方程式となる. 非線形の偏微分方程式は一般に解析解を求めることはできないので, 厳しい制約条件において特殊解を求めるか近似解を求めるか, 数値的な解を求めるかしか手はない.

## 参考文献

- [1] 広中平祐 編集代表, 現代数理科学事典, pp.282-286, 大阪書籍, 1991.
- [2] A.J.S.Hin and F.H.Post, Visualization of Turbulent Flow with Particles, *Proc. Visualization'93 (California)* ed G.M.Nielson and D.Bergeron, pp.46-51, IEEE, 1993.
- [3] J.Stolk and J.J.van Wijk, Surface-Particles for 3D Flow Visualization, *Advances in Scientific Visualization*, pp.119-130, Springer-Verlag, 1992.
- [4] R.S.Gallagher, Scalar Visualization Techniques, *Computer Visualization* ed R.S.Gallagher, chap.4 pp.89-127, CRC Press Inc., 1995.
- [5] W.C.de Leeuw and J.J.van Wijk, A Probe for Local Field Visualization, *Proc. Visualization'93 (California)* ed G.M.Nielson and D.Bergeron, pp.39-45, IEEE, 1993.
- [6] 梅村雅之 編, スーパーコンピューターが解き明かす宇宙の進化, 恒星社厚生閣, 1991.
- [7] 富田憲二, パリティ物理学コース 相対性理論, 丸善, 1990.
- [8] B.F.Schutz, 物理学における幾何学的方法, 吉岡書店, 1980.
- [9] R.M.Williams and P.A.Tuckey, Regge calculus: A brief review and bibliography, *Class. Quantum Grav.*, 9, pp.1409-1422, 1992.
- [10] 佐藤哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和, Regge 多様体による重力場方程式の数値計算, 第 51 回情処全大, No.3C-4, 1995.
- [11] 山下義行, ブラック・ホールのコンピュータ・グラフィックス: 光線追跡法の曲がった 4 次元時空への拡張, 情処学論, Vol.30, No.5, pp.642-651, 1989.
- [12] 前田恵一, 宇宙を解明する一般相対性理論, *Newton*, Vol.11, No.10, pp.38-43, 教育社, 1991.

- [13] 佐藤哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和, 物体の相対論的運動の重力場光線追跡法による可視化, 信学技法, IE95-126, 1996.
- [14] C.W.Misner, K.S.Thorne and J.A.Wheeler, *Gravitation*, pp.1166-1179, W.H.Freeman and Co., 1973.
- [15] C.Y.Wong, Application of Regge Calculus to the Schwarzschild and Reissner-Nordstrom Geometries at the Moment of Time Symmetry, *J. Math. Phys.* 12 pp.70-78, 1971.
- [16] R.Sorkin, Time-evolution problem in Regge calculus, *Phys. Rev. D* 12, pp.385-396, 1975.
- [17] S.M.Lewis, Two cosmological solutions of Regge calculus, *Phys. Rev. D* 25, pp.306-312, 1982.
- [18] H.W.Hamber and R.M.Williams, Higher Derivative Quantum Gravity on a Simplicial Lattice, *Nucl. Phys.* B248, pp.392-414, 1984.
- [19] H.W.Hamber and R.M.Williams, Simplicial Quantum Gravity with Higher Derivative Terms: Formalism and Numerical Results in Four Dimensions, *Nucl. Phys.* B269, pp.712-743, 1986.
- [20] P.A.Collins and R.Williams, Dynamics of the Friedmann Universe Using Regge Calculus, *Phys. Rev. D* 7, pp.965-971, 1973.
- [21] T.Piran and R.M.Williams, Three-plus-one formulation of Regge calculus, *Phys. Rev. D* 33, pp.1622-1633, 1986.
- [22] On the Continuum Limit of Curvature Squared Actions in the Regge Calculus, *Nucl. Phys.* B319, pp.667-686, 1989.
- [23] G.Feinberg, R.Friedberg, T.D.Lee and H.C.Ren, Lattice Gravity Near the Continuum Limit, *Nucl. Phys.* B245, pp.343-368, 1984.

- [24] J.Porter, A New Approach to the Regge Calculus: I. Formalism, *Class. Quantum Grav.* 4, pp.375-389, 1987.
- [25] J.Porter, A New Approach to the Regge Calculus: II. Application to Spherically Symmetric Vacuum Spacetimes, *Class. Quantum Grav.* 4, pp.391-410, 1987.
- [26] 斉藤泰, 牧野光則, 大石進一, レイトレーシング法を用いた異方性不均質透明体の表現, 信学誌 D-II Vol.J76-D-II No.8, pp.1755-1763, 1993.
- [27] 佐藤哲, オブジェクト指向 C 言語による相対論のシミュレーション, 準学士論文, 釧路高専, 1991
- [28] 名取亮, コンピュータ数学シリーズ 15 数値解析とその応用, コロナ社, 1990.
- [29] W.A.Miller, Foundations of Null-strut Geometrodynamics, Ph.D Dissertation, University of Texas, 1986
- [30] A.Kheyfets, N.J.LaFave and W.A.Miller, Null-strut calculus:I.Kinematics, *Phys. Rev. D* 41, pp.3628-3636
- [31] A.Kheyfets, N.J.LaFave and W.A.Miller, Null-strut calculus:II.Dynamics, *Phys. Rev. D* 41, pp.3637-3651